郑州市2026年高中毕业年级第二次质量预测

数学评分参考

一、选择题（每小题5分，共40分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	**D**	C	D	A	C	D	C	A

二、选择题（每小题6分，共18分）

题号	9	10	11
答案	ABC	BD	ACD

三、填空题（每小题5分，共15分）

12.0　　13. $(-\frac{7}{3},-2)$　　14. $\sqrt{3}$

四、解答题

15.解：（1）因为 $BD=2DC$，所以 $S_{\triangle ABC}=3S_{\triangle ADC}$，

则 $\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\angle BAC=\frac{3}{2}AD\cdot AC\sin\angle DAC$，

即 $AB\cdot AC\sin\angle BAC=3AD\cdot AC\sin\angle DAC$，　　..3分

因为 $\angle BAC+\angle DAC=\pi$，所以 $\sin\angle BAC=\sin\left(\pi-\angle DAC\right)=\sin\angle DAC$，

所以 $AB=3AD$，即 $\frac{AB}{AD}=3$.　　..6分

（2）不妨令 $BD=2DC=2$，则 $BC=3$，$CD=AC=1$，设 $AD=x$，则 $AB=3x$.

在△ACD 中，由余弦定理得 $x^2=AC^2+CD^2-2AC\cdot CD\cos\angle ACD$，

即 $x^2=2-2\cos\angle ACD$．①　　..9分

在 ABC 中，由余弦定理得 $9x^2=BC^2+AC^2-2BC\cdot AC\cos\angle ACB$，即

$9x^2=10-6\cos\angle ACD$．②　　..11分

①②联立，解得 $\cos\angle ACD=\frac{2}{3}$.　　..13分

16.解：（1）设 $AC\cap BD=O$，在平面 PAC 内过点 A 作 $AH\perp PO$，垂足为 H，

因为平面 $PAC\perp$ 平面 PBD，平面 $PAC\cap$ 平面 $PBD=PO$，

所以 $AH\perp$ 平面 PBD，　　..2分

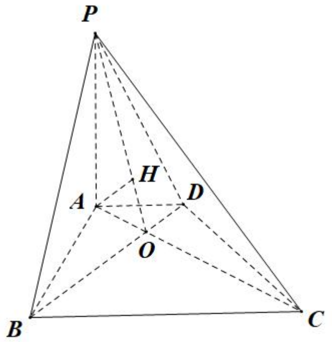
又 $BD\subset$ 平面 PBD，所以 $BD\perp AH$，　　..3分

因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$BD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $BD\perp PA$，..4分

因为 $BD \perp AH$， $PA \cap AH = A$， $PA \subset$ 平面 PAC， $AH \subset$ 平面 PAC，

所以 $BD \perp$ 平面 PAC， ....5 分

又因为 $PC \subset$ 平面 PAC，所以 $BD \perp PC$． ....6 分



（2）在 $\triangle ABD$ 中，由 $AB=\sqrt{3}$， $AD=1$， $AB \perp AD$，可得 $BD=2$， $\angle ABD=\dfrac{\pi}{6}$，

由（1）知 $BD \perp AC$，则 $V_{P-ABCD}=\dfrac{1}{3}S_{ABCD}\times PA=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 2\times AC\times\sqrt{3}=2$，

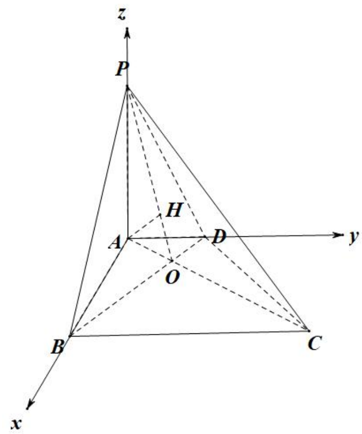
解得 $AC=2\sqrt{3}$， $\angle BAO=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $BC=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2-\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}}=3$， $AB \perp BC$，

....8 分

因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$， $AB, AD \subset$ 平面 $ABCD$，所以 $AP \perp AB$， $AP \perp AD$，

以 AP, AB, AD 为 z, x, y 轴建立如图所示空间直角坐标系，

所以 $P\left(0,0,\sqrt{3}\right)$， $A\left(0,0,0\right)$， $B\left(\sqrt{3},0,0\right)$， $D\left(0,1,0\right)$， $C\left(\sqrt{3},3,0\right)$， .....9 分



设平面 PBC 的一个法向量为 $\vec{n}=\left(x,y,z\right)$，

$\overrightarrow{BC}=\left(0,3,0\right)$， $\overrightarrow{BP}=\left(-\sqrt{3},0,\sqrt{3}\right)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{BC}\cdot\vec{n}=3y=0\\ \overrightarrow{BP}\cdot\vec{n}=-\sqrt{3}x+\sqrt{3}z=0\end{cases}$，取 $\vec{n}=\left(1,0,1\right)$， ....11 分

设平面 PCD 的一个法向量为 $\vec{m}=\left(x,y,z\right)$，

又 $\overrightarrow{PD}=\left(0,1,-\sqrt{3}\right)$， $\overrightarrow{PC}=\left(\sqrt{3},3,-\sqrt{3}\right)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{PD}\cdot\vec{m}=y-\sqrt{3}z=0\\ \overrightarrow{PC}\cdot\vec{m}=\sqrt{3}x+3y-\sqrt{3}z=0\end{cases}$，取 $\vec{m}=\left(-2,\sqrt{3},1\right)$， ....13 分

所以 $\cos\langle\vec{n},\vec{m}\rangle=\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{m}}{|\vec{n}||\vec{m}|}=\dfrac{-1}{\sqrt{2}\times\sqrt{8}}=-\dfrac{1}{4}$，

所以平面 PAD 与平面 PCD 的夹角的余弦值为 $\dfrac{1}{4}$． ....15 分

17.解：（1）当$a=2$时，$f(x)=2x-xe^x$，$f'(x)=2-(x+1)e^x$，设切点$(x_0,2x_0-x_0e^{x_0})$

则切线方程为$y-(2x_0-x_0e^{x_0})=(2-(x_0+1)e^{x_0})(x-x_0)$，......................2 分

把$(0,m)$代入得$m-(2x_0-x_0e^{x_0})=(2-(x_0+1)e^{x_0})(0-x_0)$，整理得$m={x_0}^2e^{x_0}$，

因为过点$(0,m)$可以作曲线$y=f(x)$三条切线，所以$m={x_0}^2e^{x_0}$有三个解. ....4 分

设$g(x)=x^2e^x, g'(x)=(x^2+2x)e^x$，令$g'(x)>0$，得$x<-2$或$x>0$，令$g'(x)<0$，得$-2<x<0$，

所以$g(x)$在区间$(-\infty,-2)$和$(0,+\infty)$上单调递增，在$(-2,0)$上单调递减；

$g(-2)=\dfrac{4}{e^2}$，$g(0)=0$，所以当$0<m<\dfrac{4}{e^2}$时，$m={x_0}^2e^{x_0}$有三个解，过点$(0,m)$可以作曲线$y=f(x)$三条切线. ....7 分

（2）$f(x)\leqslant a+b$等价于$b\geqslant ax-xe^x-a$对任意$x\in \mathrm{R}$成立，令$h(x)=ax-xe^x-a, a>0$，则$b\geqslant h(x)_{\max}$.

$h'(x)=a-(x+1)e^x$，$h''(x)=-(x+2)e^x$，$h'(x)$在$(-\infty,-2)$上单调递增，在$(-2,+\infty)$上单调递减，

当$x<-1$时，$h'(x)>0$，$x\to+\infty$，$h'(x)<0$，所以存在$x_0\in(-1,+\infty)$，$h'(x_0)=0$，且当$x\in(-\infty,x_0)$，

$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增，当$x\in(x_0,+\infty)$，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减.

$h(x)_{\max}=h(x_0)=ax_0-x_0e^{x_0}$，又因为$h'(x_0)=a-(x_0+1)e^{x_0}=0$，所以$a=(x_0+1)e^{x_0}$，

$h(x)_{\max}=x_0(x_0+1)e^{x_0}-x_0e^{x_0}-(x_0+1)e^{x_0}=({x_0}^2-x_0-1)e^{x_0}$，......................11 分

存在$a>0$，即$x_0\in(-1,+\infty)$，使得$b\geqslant h(x_0)$即可，所以$b\geqslant h(x_0)_{\min}$.

令$\varphi(x)=(x^2-x-1)e^x, x>-1$，$\varphi'(x)=(x^2+x-2)e^x=(x+2)(x-1)e^x$，所以$\varphi(x)$在$(-1,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，$\varphi(x)_{\min}=\varphi(1)=-e$.所以$b\geqslant -e$.

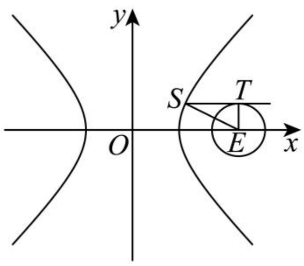
综上，当$b\geqslant -e$时，存在$a\in \mathrm{R}^+$，使得$f(x)\leqslant a+b$对任意$x\in \mathrm{R}$成立. ....15 分

18.解：（1）因为焦点到一条渐近线的距离为 1，即$d=\dfrac{bc}{\sqrt{a^2+b^2}}=b=1$，又点$P(2,-1)$在双

曲线上，所以$\dfrac{2^2}{a^2}-\dfrac{1^2}{b^2}=1$，解得$a^2=2$.所以双曲线的方程为$\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$.　　......................5 分

（2）圆E：$(x-5)^2+y^2=2$的圆心$E(5,0)$，半径为$\sqrt{2}$.

因为T是圆E上的动点，直线ST与圆E相切，所以$ST\perp TE$，$|TE|=\sqrt{2}$.



所以$|ST|=\sqrt{|SE|^2-|ET|^2}=\sqrt{|SE|^2-2}$.

设$S(x_0,y_0)$，因为点S是双曲线C上的动点，所以$\dfrac{x_0^2}{2}-y_0^2=1$.

所以$|SE|=\sqrt{(x_0-5)^2+y_0^2}=\sqrt{x_0^2-10x_0+25+\dfrac{x_0^2}{2}-1}=\sqrt{\dfrac{3}{2}\left(x_0-\dfrac{10}{3}\right)^2+\dfrac{22}{3}}$，

当$x_0=\dfrac{10}{3}$时，$|SE|$取得最小值，此时$|SE|_{\min}=\sqrt{\dfrac{22}{3}}$，

所以$|ST|_{\min}=\sqrt{\dfrac{22}{3}-2}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.　　................................10 分

（3）由题意知，直线AB的斜率存在，设直线AB的方程为$y=kx+m$.

联立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}-y^2=1\\ y=kx+m\end{cases}$，整理得$\left(1-2k^2\right)x^2-4kmx-2m^2-2=0$，

$\Delta=(-4km)^2-4\left(1-2k^2\right)\left(-2m^2-2\right)=8\left(m^2+1-2k^2\right)>0$且$1-2k^2\neq 0$，

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则$x_1+x_2=\dfrac{4km}{1-2k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{-2m^2-2}{1-2k^2}$，　　................................12 分

直线PA的方程为$y+1=\dfrac{y_1+1}{x_1-2}(x-2)$，

令$x=0$，则$y=-1-\dfrac{2y_1+2}{x_1-2}$，即$M\left(0,-1-\dfrac{2y_1+2}{x_1-2}\right)$.

同理可得，$N\left(0,-1-\dfrac{2y_2+2}{x_2-2}\right)$.

因为M,N关于原点对称，所以$-1-\dfrac{2y_1+2}{x_1-2}+\left(-1-\dfrac{2y_2+2}{x_2-2}\right)=0$，　　................................13 分

即$-1-\dfrac{2(kx_1+m)+2}{x_1-2}+\left(-1-\dfrac{2(kx_2+m)+2}{x_2-2}\right)=0$，

整理得$(2k+1)x_1x_2-(2k-m+1)(x_1+x_2)-4m=0$，

即$\frac{(2k+1)(-m^2-3)}{1-k^2}-\frac{2km(2k-m+1)}{1-k^2}-4m=0$，

整理得$m^2+2km+2m+2k+1=0$， ....14 分

即$(m+1)(m+2k+1)=0$，

所以$m=-1$或$m+2k+1=0$． ....15 分

若$m+2k+1=0$，则$m=-2k-1$，则直线方程为$y=kx-2k-1$，即$y+1=k(x-2)$，

此时直线AB过点$P(2,-1)$，不符合题意.

若$m=-1$，则直线方程为$y=kx-1$，恒过定点$D(0,-1)$， ....16 分

所以$|PD|=2$为定值，又$PQ\perp AB$，在$\mathrm{Rt}\triangle PQD$中，PD为斜边，

所以当R为PD中点$(1,-1)$时，$|RQ|=\frac{1}{2}|PD|=1$．

因此存在点$R(1,-1)$，使得$|QR|$为定值. ....17 分

19.解：（1）拿到标号为 3 的奖券，$X=3$，即至少有一次抽到 3，所以

$P(X=3)=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$． ....2 分

拿到编号为 2 的奖券，$X=2$，即没有抽到 3，且至少有一次抽到 2，

没有抽到 3 的概率为$\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$，没有抽到 3 且全抽到 1 的概率为$\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$，

$P(X=2)=\frac{4}{9}-\frac{1}{9}=\frac{1}{3}$．

所以最终拿到标号为 3 的奖券的概率是$\frac{5}{9}$，最终拿到标号为 2 的奖券的概率是$\frac{1}{3}$．

.................................4 分

（2）①拿到编号不大于k，$X\leqslant k$，即每次抽到的编号都小于等于k．

所以$P(X\leqslant k)=(\frac{k}{4})^m$，$k=1,2,3,4$． ....6 分

②$P(X=k)=P(X\leqslant k)-P(X\leqslant k-1)=(\frac{k}{4})^m-(\frac{k-1}{4})^m$，$k=1,2,3,4$，

.................................8 分

所以随机变量X的期望

$$E(X)=1\cdot(\frac{1}{4})^m+2\cdot[(\frac{2}{4})^m-(\frac{1}{4})^m]+3\cdot[(\frac{3}{4})^m-(\frac{2}{4})^m]+4\cdot[1-(\frac{3}{4})^m]$$

$=4-(\frac{1}{4})^m-(\frac{2}{4})^m-(\frac{3}{4})^m.$ ....10 分

(3) $P(X=k)=P(X\leqslant k)-P(X\leqslant k-1)=\left(\frac{k}{n}\right)^n-\left(\frac{k-1}{n}\right)^n$，$k=1,2,\dots,n$，

随机变量 X 的期望 $E(X)=\sum\limits_{k=1}^{n}k\cdot P(X=k)$

$=1\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n+2\cdot\left[\left(\frac{2}{n}\right)^n-\left(\frac{1}{n}\right)^n\right]+\cdots+n\cdot\left[1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^n\right]$

$=n-\left(\frac{1}{n}\right)^n-\left(\frac{2}{n}\right)^n-\cdots-\left(\frac{n-1}{n}\right)^n.$ ....13 分

设 $f(x)=x^n+(1-x)^n$，$x\in(0,1)$，$f'(x)=n\left[x^{n-1}-(1-x)^{n-1}\right]$，

当 $n=1$ 时，$P(X=1)=1,\ E(X)=1\times1=1$，等号成立；

当 $n\geqslant 2$ 时，当 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

所以 $f(x)=x^n+(1-x)^n\geqslant f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{2^n}$， ....15 分

设 $M=\left(\frac{1}{n}\right)^n+\left(\frac{2}{n}\right)^n+\ldots+\left(\frac{n-2}{n}\right)^n+\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$，

因为 $M=\left(\frac{n-1}{n}\right)^n+\left(\frac{n-2}{n}\right)^n+\ldots+\left(\frac{2}{n}\right)^n+\left(\frac{1}{n}\right)^n$，

所以 $2M\geqslant(n-1)\cdot\frac{2}{2^n}$，所以 $M\geqslant\frac{n-1}{2^n}$.

综上所述，$E(X)\leqslant n-\frac{n-1}{2^n}$. ....17 分