郑州市2026年高中毕业年级第一次质量预测

数学 评分参考

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	**B**	**A**	**A**	**D**	**C**	**D**	**B**	**C**

二、多选题：本题共3小题，每小题6分，共18分.

题号	9	10	11
答案	**ABD**	**AC**	**ACD**

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分.

12. $\underline{\quad 4 \quad}$　　13. $\underline{\quad 60 \quad}$　　14. $\underline{\quad \dfrac{\sqrt{5}}{3} \quad}$

四、解答题：本题共5小题，共77分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 解：(1) $\overline{x}=\dfrac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}x_i=55,\ \overline{y}=\dfrac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}y_i=91.7,$……2分

……5分

$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{10}x_iy_i-10\overline{xy}}{\sum_{i=1}^{10}x_i^2-10\overline{x}^2}=\frac{55950-10\times55\times91.7}{38500-10\times55^2}=\frac{1103}{1650}\approx0.67,$$

$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=91.7-0.67\times55=54.85,$……6分

所以，加工时间y关于零件个数x的经验回归方程是$\hat{y}=0.6,7x+54.85,$……7分

(2)（i）当$x=120$时，$\hat{y}=0.67\times120+54.85=135.25.$……9分

所以120个零件任务的回归预测时间135.25< 144，因此低于现行标准时间……10分

（ii）由于回归预测显示实际所需时间（约135.25分）比标准时间（144分）少 9 分钟，说明按照现行标准，工人很容易拿到奖励（实际效率更高）.如果车间希望控制奖励发放比例或更符合实际效率，应考虑调低标准时间, 如调整到接近预测的 $\dfrac{135.25}{120}\approx1.13$分/个.

使标准更贴近真实加工能力……13分

16.解：（1）在$\triangle ABC$中，由$\tan B\tan C=\tan B+\tan C+1$得

$$\frac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}=-1,$$

$\therefore \tan(B+C)=-1$……………………………………………2 分

又 $\tan A=-\tan(B+C)$，$\therefore \tan A=1$,……………………………………………3 分

又 $0<A<\pi$，$\therefore A=\dfrac{\pi}{4}$……………………………………………4 分

$\because a=\sqrt{6}$，$c=3$,$\therefore$ 由正弦定理得 $\sin C=\dfrac{c\sin A}{a}=\dfrac{3\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.……………………6 分

$\because c>a$，$\because \mathrm{C}=\dfrac{\pi}{3}$ 或 $\dfrac{2\pi}{3}$……………………………………………7 分

（2）因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，所以 $\mathrm{C}=\dfrac{\pi}{3}$,……………………………………………8 分

$\therefore \sin B=\sin(A+C)=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$,……………………………………………10 分

$\because \overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=\vec{0}$,$\therefore N$是$\Delta ABC$的重心,……………………………………………11 分

……………………………………………12 分

$\therefore S_{\Delta NBC}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}$

$=\dfrac{1}{6}ac\sin B=\dfrac{1}{6}\times\sqrt{6}\times3\times\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$,

所以 ΔNBC 的面积为 $\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$……………………………………………15 分

17. 解：(1)在矩形 $CDEF$ 中，$CD=1,DE=2,$点 A，B 分别是 DE，CF的中点，

所以四边形 $ABCD$ 和 $EFBA$ 是全等的正方形，所以 $BD\perp AC, AE\perp AB$……………………2 分

又因为平面 $ABCD\perp$平面 $EFBA$，

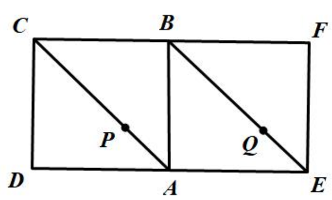
平面 $ABCD\cap$平面 $EFBA=AB, AE\subset$平面 $EFBA$，

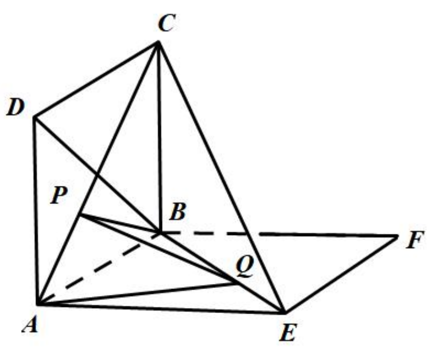
所以 $AE\perp$平面 $ABCD$……………………………………………4 分

因为 $BD\subset$平面 $ABCD$，所以 $AE\perp BD$……………………………………………5 分

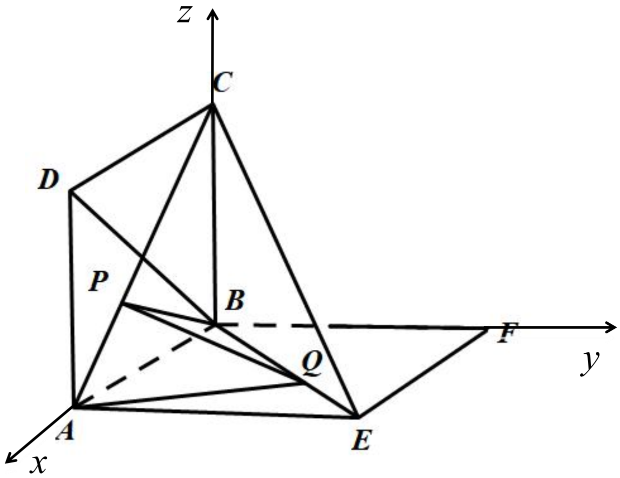
又因为 $BD\perp AC, AE\cap AC=A$，AE，$AC\subset$平面 AEC，

所以 $BD\perp$平面 AEC……………………………………………6 分





(2) 以 B 为原点，BA,BF,BC 所在直线分别为 x轴、y轴、z轴，建立如图所示的空间直角坐标系.



则 $B(0,0,0),A(1,0,0),E(1,1,0)$，

$F(0,1,0),C(0,0,1),D(1,0,1)$，

..............................7 分

则 $\overrightarrow{CA}=(1,0,-1)$，$\overrightarrow{CB}=(0,0,-1)$，

$\because CP=BQ=a$，

则 $\overrightarrow{CP}=\dfrac{\sqrt{2}a}{2}\overrightarrow{CA}=(\dfrac{\sqrt{2}a}{2},0,-\dfrac{\sqrt{2}a}{2})$，

$\overrightarrow{BQ}=\dfrac{\sqrt{2}a}{2}\overrightarrow{BE}=(\dfrac{\sqrt{2}a}{2},\dfrac{\sqrt{2}a}{2},0)$，

$\therefore \overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BQ}=(0,\dfrac{\sqrt{2}a}{2},\dfrac{\sqrt{2}a}{2}-1)$，..8 分

$\therefore \left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{(\dfrac{\sqrt{2}a}{2})^2+(\dfrac{\sqrt{2}a}{2}-1)^2}=\sqrt{a^2-\sqrt{2}a+1}\quad(0<a<\sqrt{2})$ ....9 分

(3) 因为 $\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{a^2-\sqrt{2}a+1}=\sqrt{(a-\dfrac{\sqrt{2}}{2})^2+\dfrac{1}{2}}$，

所以当 $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，线段 PQ 最短...10 分

此时 P, Q 分别为线段 AC,BF 的中点，$\overrightarrow{PQ}=\left(0,\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right),\overrightarrow{AQ}=\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0\right)$.

设 $\vec{n}=(x,y,z)$ 是平面 PQA 的一个法向量，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PQ}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AQ}=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\dfrac{1}{2}y-\dfrac{1}{2}z=0\\ -\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}y=0\end{cases}$，

取平面 PQA 的一个法向量为 $\vec{n}=(1,1,1)$..12 分

由（1）知，$\overrightarrow{BD}=(1,0,1)$ 为平面 AEC 的一个法向量，..13 分

设平面PQA与平面AEC夹角为θ，则$\left|\cos\theta\right|=\left|\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{BD}\right\rangle\right|=\dfrac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{BD}\right|}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BD}\right|}=\dfrac{2}{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

所以平面PQA与平面AEC夹角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$..15 分

18．解：（1）由题意可得$c=\sqrt{3}$，又$\begin{cases}a^2+b^2=3\\ \dfrac{3}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}$，........................4 分

故椭圆C的标准方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$..5 分

（2）（i）由（1）可得：$A\left(-2,0\right),B\left(0,-1\right)$，设$P\left(x_0,y_0\right),x_0>0,y_0>0$，

且$\dfrac{{x_0}^2}{4}+{y_0}^2=1$，即${x_0}^2+4{y_0}^2=4$...6 分

则$l_{AP}:y=\dfrac{y_0}{x_0+2}(x+2)$，令$x=0,y=\dfrac{2y_0}{x_0+2}\therefore D(0,\dfrac{2y_0}{x_0+2})$ ....7 分

则$l_{BP}:y=\dfrac{y_0+1}{x_0}x-1$，令$y=0,y=\dfrac{2y_0}{x_0+2}\therefore C(\dfrac{x_0}{y_0+1}0,)$ ....8 分

则$|AC|=\dfrac{x_0}{y_0+1}+2=\dfrac{x_0+2y_0+2}{y_0+1}$，$|BD|=\dfrac{2y_0}{x_0+2}+1=\dfrac{x_0+2y_0+2}{x_0+2}$................................10 分

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}|AC|\cdot|BD|=\frac{1}{2}(\frac{x_0+2y_0+2}{y_0+1})\cdot(\frac{x_0+2y_0+2}{x_0+2})$$

$$=\frac{1}{2}\frac{(x_0+2y_0+2)^2}{x_0y_0+x_0+2y_0+2}=\frac{2(x_0y_0+x_0+2y_0+2)}{x_0y_0+x_0+2y_0+2}=2.$$

故求证四边形$ABCD$面积为定值 2...12 分

（ii）直线$l_{AB}:x+2y+2=0$，$P\left(x_0,y_0\right)$到直线的距离为

$d=\dfrac{|x_0+2y_0+2|}{\sqrt{5}}$且$|AB|=\sqrt{5}$ ....14 分

$S_{\triangle PAB}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\dfrac{|x_0+2y_0+2|}{\sqrt{5}}=\dfrac{1}{2}|x_0+2y_0+2|\le\dfrac{1}{2}(\sqrt{2({x_0}^2+4{y_0}^2)}+2)=\sqrt{2}+1$.......16 分

当且仅当$x_0=2y_0=\sqrt{2}$时等号成立.

所以，$\triangle PCD$的面积$S_{\triangle PCD}=S_{\triangle PAB}-S_{ABCD}\le\sqrt{2}+1-2=\sqrt{2}-1$ ....17 分

19.（17 分）（1）$f'(x)=\frac{a}{x}-2(a\in\mathbf{R})$， ....1 分

当$a=1$时，$f'(1)=-1$，$f(1)=0$，...2 分

故$f(x)$的图象在$(1,f(1))$处的切线方程为$y=-(x-1)$,，即$x+y-1=0$ ....3 分

（2）$f'(x)=\frac{a}{x}-2(a\in\mathbf{R})$，

当$a\le 0$时，令$f'(x)<0$，$f(x)$在R上递减，$f(x)$最多一个零点，与题意不符.......4 分

当$a>0$时，令$f'(x)=0$，则$x=\frac{a}{2}$，则当$x\in\left(0,\frac{a}{2}\right)$，$f'(x)>0$；当$x\in\left(\frac{a}{2},+\infty\right)$，$f'(x)<0$，

所以，$f(x)$在$\left(0,\frac{a}{2}\right)$单调递增，在$\left(\frac{a}{2},+\infty\right)$上单调递减，.......................................5 分

故$f(x)_{极大值}=f\left(\frac{a}{2}\right)=a\ln\frac{a}{2}+a=a(1+\ln\frac{a}{2})$...7 分

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\infty,\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

故$f(x)$有两个零点，即$f(x)_{极大值}=a(1+\ln\frac{a}{2})>0\therefore a>\frac{2}{e}$..9 分

（3）由于$g(x)=ax-2e^x+2a=f(e^x)$，所以$y=f(x)$与$y=g(x)$的零点个数相同.

依题意共有 4 个不同的零点，所以$f(x)$有两个零点...10 分

不妨设$y=g(x)$的两个零点为$x_1,x_2(x_1<x_2)$，$y=f(x)$的两个零点为$x_3,x_4(x_3<x_4)$，

则有$x_1=\ln x_3<\ln\frac{a}{2}<\ln x_4=x_2$，..11 分

$$\begin{cases}f(x_3)=a\ln x_3-2x_3+2a=0,\\ f(x_4)=a\ln x_4-2x_4+2a=0,\end{cases}得\begin{cases}\ln x_3=\frac{2}{a}x_3-2\\ \ln x_4=\frac{2}{a}x_4-2\end{cases},①$$

所以$\ln x_3-\ln x_4=\frac{2}{a}(x_3-x_4)$,②

若四个零点成等差数列，则有两种情况：.

①当$x_1<x_2<x_3<x_4$时，即$\ln x_3,\ln x_4,x_3,x_4$成等差数列，则有$\ln x_3-\ln x_4=x_3-x_4$，③

由②③得$a=2$.

代入①得$\ln x_3=x_3-2$，$\ln x_4=x_4-2$ ④

又$\begin{cases}\ln x_3+x_3=2\ln x_4\\ \ln x_4+x_4=2x_3\end{cases}$ ⑤

将④代入⑤式可得$\begin{cases}2x_3-2=2x_4-4\\ 2x_4-2=2x_3\end{cases}\Rightarrow x_4=x_3+1$，

代入③可得$x_4=\mathrm{e}\,x_3$，解得$x_3=\dfrac{1}{\mathrm{e}-1},x_4=\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$，这与④矛盾，故实数$a$不存在.............14 分

②当$x_1<x_3<x_2<x_4$时，即$\ln x_3,x_3,\ln x_4,x_4$成等差数列，则$\ln x_3-\ln x_4=x_3-x_4$，③

由②③得$a=2$，同理得$\ln x_3=x_3-2$，$\ln x_4=x_4-2$　④

又$\begin{cases}\ln x_3+\ln x_4=2x_3\\ x_3+x_4=2\ln x_4\end{cases}$　⑥

将④代入⑥式可得$\begin{cases}x_3+x_4-4=2x_3\\ x_3+x_4=2x_4-4\end{cases}\Rightarrow x_4=x_3+4$，

代入③可得$x_4=\mathrm{e}^4x_3$，解得$x_3=\dfrac{4}{\mathrm{e}^4-1},x_4=\dfrac{4\mathrm{e}^4}{\mathrm{e}^4-1}$，

这与④矛盾，故实数a不存在.

综上所述，不存在实数a使得四个零点成等差数列..17 分