

郑州市 2024-2025 学年下期期末考试

高中二年级数学 评分参考

一、选择题:

1-5 CDBAC 6-8 ACD

二、选择题:

9.ACD 10.BC 11.ACD

三、填空题:

12. 150 13. $\frac{4}{9}, \frac{1}{2}$ 14. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

四、解答题:

15.(13 分)解析: (I) 由题意可知, $C_n^1 : C_n^2 = 1:2$ (1 分)

即 $\frac{n}{n(n-1)} = \frac{1}{2}$, 得 $n^2 = 5n$, 又 $n \in N^*$, 所以 $n = 5$ (2 分)

因为 $(x + \frac{2}{\sqrt{x}})^5$ 展开式的通项为 $T_{k+1} = C_5^k x^{5-k} (\frac{2}{\sqrt{x}})^k = C_5^k 2^k x^{5-\frac{3k}{2}}$,

$0 \leq k \leq 5$ 且 $k \in Z$ (3 分)

当 $k = 0, 2, 4$ 时, $5 - \frac{3k}{2}$ 为整数,(4 分)

即 $T_1 = C_5^0 \times 2^0 x^5 = x^5$, $T_3 = C_5^2 \times 2^2 x^2 = 40x^2$, $T_5 = C_5^4 \times 2^4 x^{-1} = \frac{80}{x}$

所以 $(x + \frac{2}{\sqrt{x}})^n$ 展开式的有理项为 $x^5, 40x^2, \frac{80}{x}$(7 分)

(II) 因为二项展开式的通项为 $T_{k+1} = C_5^k 2^k x^{5-\frac{3k}{2}}$, $0 \leq k \leq 5$ 且 $k \in Z$

设展开式中第 $k+1$ 项的系数最大, 则 $\begin{cases} C_5^k 2^k \geq C_5^{k+1} 2^{k+1} \\ C_5^k 2^k \geq C_5^{k-1} 2^{k-1} \end{cases}$,(8 分)

得 $3 \leq k \leq 4$ (10 分)

故 $(x + \frac{2}{\sqrt{x}})^n$ 展开式的第 4 项和第 5 项的系数最大,

$$T_4 = C_5^3 \times 2^3 x^{\frac{1}{2}} = 80x^{\frac{1}{2}}, \quad T_5 = C_5^4 \times 2^4 x^{-1} = \frac{80}{x} \quad \dots\dots\dots(12 \text{ 分})$$

故 $(x + \frac{2}{\sqrt{x}})^n$ 展开式系数最大的项为第 4 项和第 5 项, 系数为 80,

$$T_4 = 80x^{\frac{1}{2}}, T_5 = 80x^{-1}. \quad \dots\dots\dots(13 \text{ 分})$$

16.(15 分)解析: (I) 设原来数据的样本中心点为 $(\bar{x}, \bar{y})$,

去掉第 5 日的数据后样本中心点为 $(\bar{x}', \bar{y}')$

$$\bar{x}' = \frac{1}{8}(1+2+3+4+6+7+8+9) = 5, \quad \bar{x}' = x_5 = 5 = \bar{x}, \quad \dots\dots\dots(2 \text{ 分})$$

$$\bar{y}' = \frac{1}{8}(9\bar{y} - y_5) = \frac{1}{8}(9 \times 190 - 203) = \frac{1507}{8}, \quad \dots\dots\dots(4 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \hat{b} &= \frac{(\sum_{i=1}^9 x_i y_i - x_5 \cdot y_5) - 8\bar{x}' \cdot \bar{y}'}{\sum_{i=1}^9 (x_i - \bar{x}')^2 - (x_5 - \bar{x}')^2} = \frac{(\sum_{i=1}^9 x_i y_i - x_5 \cdot y_5) - 8\bar{x}' \cdot \frac{9\bar{y} - y_5}{8}}{\sum_{i=1}^9 (x_i - \bar{x}')^2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^9 x_i y_i - x_5 \cdot y_5 - 9\bar{x}' \cdot \bar{y} + \bar{x}' y_5}{\sum_{i=1}^9 (x_i - \bar{x}')^2} = \frac{\sum_{i=1}^9 x_i y_i - 9\bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^9 (x_i - \bar{x})^2} = \frac{1800}{60} = 30, \quad \dots\dots\dots(8 \text{ 分}) \end{aligned}$$

$$\hat{a} = \bar{y}' - \hat{b}\bar{x}' = \frac{1507}{8} - 30 \times 5 = \frac{307}{8}, \quad \dots\dots\dots(10 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } \hat{y} = 30x + \frac{307}{8}. \quad \dots\dots\dots(11 \text{ 分})$$

(II) 当 $x = 10$ 时, $30 \times 10 + \frac{307}{8} = 338.375 \approx 338$ (人), 故第 10 日的打卡人数约为 338 人. \dots\dots\dots(15 \text{ 分})

17.(15 分)解析: (I) 函数 $f(x)$ 的定义域为 R ,

$$f'(x) = \frac{2ax - ax^2 - 1}{e^x} = -\frac{ax^2 - 2ax + 1}{e^x} (a > 0) \quad \dots\dots\dots(1 \text{ 分})$$

$$\text{令 } g(x) = ax^2 - 2ax + 1 \quad (a > 0),$$

$$\Delta = 4a^2 - 4a = 4a(a - 1) \quad \dots\dots\dots(2 \text{ 分})$$

① 当 $a > 1$ 时, $\Delta > 0$, $ax^2 - 2ax + 1 = 0$,得

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - a}}{a} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{a}}, \quad \dots\dots\dots(4 \text{ 分})$$

$$\text{令 } f'(x) > 0, \text{ 得 } 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{a}} < x < 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{a}},$$

$$\text{令 } f'(x) < 0, \text{ 得 } x < 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{a}} \text{ 或 } x > 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{a}},$$

所以 $f(x)$ 在 $(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{a}}, 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{a}})$ 上单调递增,

在 $(-\infty, 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{a}})$ 和 $(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{a}}, +\infty)$ 上单调递减. $\dots\dots\dots(5 \text{ 分})$

② 当 $a = 1$ 时, $g(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \geq 0$, $f'(x) = -\frac{x^2 - 2x + 1}{e^x} \leq 0$, $f(x)$ 在 R 上单调递减. $\dots\dots\dots(6 \text{ 分})$

③ 当 $0 < a < 1$ 时, $\Delta < 0$, $g(x) = ax^2 - 2ax + 1 > 0$, $f'(x) = -\frac{x^2 - 2x + 1}{e^x} < 0$, $f(x)$ 在 R 上单调递减. $\dots\dots\dots(7 \text{ 分})$
 综上得,

当 $a > 1$ 时, $f(x)$ 在 $(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{a}}, 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{a}})$ 上单调递增,

在 $(-\infty, 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{a}})$ 和 $(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{a}}, +\infty)$ 上单调递减.

当 $0 < a \leq 1$ 时, $f(x)$ 在 R 上单调递减. $\dots\dots\dots(8 \text{ 分})$

(II) 由 (I) 可知, 当 $a > 1$ 时, $f(x)$ 有两个极值点, 且满足

$$x_1 + x_2 = 2, x_1 x_2 = \frac{1}{a}, \text{ 不妨令 } x_1 < x_2 \quad \dots\dots\dots(10 \text{ 分})$$

$$f(x_1)f(x_2) = \frac{ax_1^2 + 1}{e^{x_1}} \times \frac{ax_2^2 + 1}{e^{x_2}} = \frac{(ax_1^2 + 1)(ax_2^2 + 1)}{e^{x_1 + x_2}} = \frac{a^2 x_1^2 x_2^2 + a(x_1^2 + x_2^2) + 1}{e^{x_1 + x_2}} = \frac{2 + (\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1})}{e^2}$$

$\dots\dots\dots(12 \text{ 分})$

因为 $x_1 \neq x_2$ ，且 $x_1 > 0, x_2 > 0$ ，所以 $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} > 2$ ，故 $f(x_1)f(x_2) = \frac{2 + (\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1})}{e^2} > \frac{4}{e^2}$

所以 $f(x_1)f(x_2)$ 的取值范围为 $(\frac{4}{e^2}, +\infty)$ (15 分)

18.(17 分)

(I) 零假设 H_0 : 根据人脸照片识别性别的程序的识别结果与性别没有差异.(1 分)

$$\chi^2 = \frac{200 \times (105 \times 20 - 15 \times 60)^2}{120 \times 80 \times 165 \times 35} \approx 5.195 > 3.841, \quad \text{.....(4 分)}$$

根据小概率值 $\alpha = 0.05$ 的独立性检验，推断 H_0 不成立，故根据人脸照片识别性别的程序的识别结果与性别存在差异.(5 分)

(II) (i) 设事件 A : 输入女性照片且识别正确，根据题中数据， $P(A)$ 可估计为

$$\frac{60}{80} = \frac{3}{4}. \quad \text{.....(7 分)}$$

记 ξ 表示从该市测试的女性人脸照片中随机抽取 3 张识别正确的张数，

$$\text{则 } \xi \sim B(3, \frac{3}{4}), \quad \text{.....(8 分)}$$

$$\text{则 } P(\xi = 2) = C_3^2 (\frac{3}{4})^2 \times \frac{1}{4} = \frac{27}{64} \quad \text{.....(10 分)}$$

(ii) 由题意知, X 的所有可能取值为 1, 2, 3.(11 分)

$$P(X=1) = \frac{3}{4}, P(X=2) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16}, P(X=3) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}. \quad \text{.....(14 分)}$$

所以 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$

.....(15 分)

$$\text{所以 } E(X) = 1 \times \frac{3}{4} + 2 \times \frac{3}{16} + 3 \times \frac{1}{16} = \frac{21}{16}. \quad \text{.....(17 分)}$$

19.(17 分) 解析: (I) 由题可知任意 $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$,

且 $x_1 > x_2$, 都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{2} > \frac{x_1-x_2}{x_1+x_2}$, 即 $\frac{ax_1^2-2x_1-ax_2^2+2x_2}{2} > \frac{x_1-x_2}{x_1+x_2}$,(2 分)

$$\text{即 } \frac{(x_1-x_2)[a(x_1+x_2)-2]}{2} > \frac{x_1-x_2}{x_1+x_2},$$

又 $x_1 > x_2 \geq 1$, 所以 $\frac{a(x_1+x_2)-2}{2} > \frac{1}{x_1+x_2}$, 即 $a(x_1+x_2)^2-2(x_1+x_2)-2 > 0$ (4 分)

令 $t = x_1 + x_2$, 则 $at^2 - 2t - 2 > 0$ 对 $t \in (2, +\infty)$ 恒成立,

等价于 $a > \frac{2t+2}{t^2}$ 对 $t \in (2, +\infty)$ 恒成立.

记 $g(t) = \frac{2t+2}{t^2}$, 则 $g'(t) = -\frac{2t+4}{t^3} < 0$, $t \in (2, +\infty)$, 所以 $g(t)$ 在 $t \in (2, +\infty)$ 单调递减.

所以 $a \geq g(2) = \frac{3}{2}$, 故 a 的取值范围为 $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$(6 分)

(II) (i) 设 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 且 $x_1 > x_2$,

$$\text{则 } \frac{g(x_1)-g(x_2)}{2} - \frac{x_1-x_2}{x_1+x_2} = \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{2} - \frac{x_1-x_2}{x_1+x_2} = \frac{\ln \frac{x_1}{x_2} - \frac{x_1}{x_2} + 1}{2 - \frac{x_1}{x_2} + 1}. \quad \text{.....(8 分)}$$

令 $x = \frac{x_1}{x_2}$, 且 $x \in (1, +\infty)$, 记 $h(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1}$, $x \in (1, +\infty)$,(9 分)

则 $h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2} > 0$, 则 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,(11 分)

得到 $h(x) > h(1) = 0$, 即 $\frac{g(x_1)-g(x_2)}{2} > \frac{x_1-x_2}{x_1+x_2}$,

故 $g(x) = \ln x$ 是 $(0, +\infty)$ 上的“好函数”.(12 分)

(ii) 由 (i) 可知, 当设 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 且 $x_1 > x_2$ 时, $\frac{\ln x_1 - \ln x_2}{2} > \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2}$,

令 $x_1 = n+1, x_2 = n, n \in \mathbb{N}^*$, 则 $\frac{\ln(n+1) - \ln n}{2} > \frac{1}{2n+1}$,(15 分)

$$\text{即 } \ln \sqrt{n+1} - \ln \sqrt{n} > \frac{1}{2n+1},$$

所以 $\ln \sqrt{2} - \ln 1 > \frac{1}{3}$; $\ln \sqrt{3} - \ln \sqrt{2} > \frac{1}{5}$; $\ln \sqrt{4} - \ln \sqrt{3} > \frac{1}{7}$; $\cdots$; $\ln \sqrt{n+1} - \ln \sqrt{n} > \frac{1}{2n+1}$

累加, 得 $\ln \sqrt{n+1} - \ln 1 > \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n+1}$,

化简可得 $\ln \sqrt{n+1} > \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n+1}$(17 分)