郑州市 2024-2025 学年下期期末考试

高中一年级　　数学评分参考

I 卷 (选择题，共 58 分)

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	B	A	B	C	D	C	B

二、多选题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分, 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

题号	9	10	11
答案	ABC	ABD	BC

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共计 15 分.

12. 5　　13. 10π　　14. $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},2\right)$

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.解：（1）由题意得 $\begin{cases} m^2-4m+3=0 \\ m-3\neq 0 \end{cases}$，解得 $m=1$. ……………………………4 分

$\therefore z=-2i$，

$\therefore z^2=(-2i)^2=4i^2=-4.$ ……………………………6 分

（2）由题意得 z 在复平面内对应的点为 $\left(m^2-4m+3,m-3\right)$，

则 $m^2-4m+3+5(m-3)+10=0$， ……………………………10 分

化简得 $m^2+m-2=0$，解得 $m=1$ 或 -2. ……………………………13 分

16.解：（1）由频率分布直方图可知，平均数为

$55\times0.05+65\times0.1+75\times0.15+85\times0.3+95\times0.4=84\cdot$ ....4 分

（2） $\because 0.05+0.1+0.15=0.3<0.5$， $0.05+0.1+0.15+0.3=0.6>0.5$

$\therefore$ 中位数落在 $[80,90)$ 内，令中位数为 m，

则 $0.3+(m-80)\times0.03=0.5$，解得 $m=\dfrac{260}{3}\approx86.67.$ ....8 分

（3）$\because$ 评分在 $[70,80)$、$[80,90)$ 内的频率分别是 $0.15,0.3$，

$\therefore$ 在 $[70,80)$ 中抽取 $\dfrac{0.15}{0.15+0.3}\times6=2$ 人，记为 a,b.

在 $[80,90)$ 中抽取 $\dfrac{0.3}{0.15+0.3}\times6=4$ 人，记为 A,B,C,D. ....10 分

从 6 人中随机抽取 2 人，则有：

$$(a,b),(a,A),(a,B),(a,C),(a,D),(b,A),(b,B),(b,C),(b,D),$$
$$(A,B),(A,C),(A,D),(B,C),(B,D),(C,D)$$

共 15 个基本事件， ....13 分

设"选取的 2 人评分分别在 $[70,80)$、$[80,90)$ 内各 1 人"为事件 M，

则满足条件 M 的有：$(a,A),(a,B),(a,C),(a,D),(b,A),(b,B),(b,C),(b,D)$,

共 8 个基本事件. ....15 分

$\therefore P(M)=\dfrac{8}{15}.$

$\therefore$ 选取的 2 人评分分别在 $[70,80)$ 和 $[80,90)$ 内各 1 人的概率为 $\dfrac{8}{15}$. ......17 分

17.解：（1）由正弦定理可得：

$\sin A\sin B=\sqrt{3}\sin B\sin\dfrac{A}{2}=2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}\sin B$.......2 分

$\because A,B\in(0,\pi),\therefore \sin B\neq0,\sin\dfrac{A}{2}\neq0$，即 $\cos\dfrac{A}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ········5 分

$\because \dfrac{A}{2}\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right),\therefore \dfrac{A}{2}=\dfrac{\pi}{6},A=\dfrac{\pi}{3}$ ······· ·········6 分

（2）令 $\overrightarrow{AE}=\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$，$\overrightarrow{AF}=\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}$，则 $\left|\overrightarrow{AE}\right|=\left|\overrightarrow{AF}\right|=1$.

又 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}$,四边形 $AEMF$ 为菱形. AM 为 $\angle BAC$ 的角平分线. ………8 分

$\left|\overrightarrow{AM}\right|^2=\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}\right)^2=\overrightarrow{AE}^2+\overrightarrow{AF}^2+2\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=3$， $AM=\sqrt{3}$ ……… ………10

分 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}(b+c)\cdot AM\cdot\sin\dfrac{\pi}{6}$，即 $bc=b+c$ ……… ………12 分

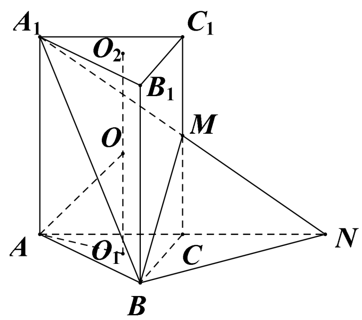
有余弦定理可得：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\dfrac{\pi}{3}=4$，即：$(b+c)^2-3bc=(bc)^2-3bc=4$，

解得：$bc=4$ ……… ………14 分

$\therefore S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ ……… ……… ……… ……… ………15 分

18.解：

（1）在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1\perp$ 平面ABC，AC、$AB\subset$ 平面ABC，



$\therefore AA_1\perp AC, AA_1\perp AB$，

$\therefore$ 点A的曲率为$2\pi-2\times\dfrac{\pi}{2}-\angle BAC=\dfrac{2\pi}{3}$，

$\therefore \angle BAC=\dfrac{\pi}{3}$.

$\therefore \Delta ABC$是等边三角形.

设面ABC,面$A_1B_1C_1$的外心分别是O_1、O_2，
直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的外接球半径是R，

由题意知，$AO_1=2, OO_1=\dfrac{1}{2}AA_1=2$,

$\therefore R=AO=\sqrt{AO_1^{\,2}+OO_1^{\,2}}=2\sqrt{2}$,

$\therefore$ 直三棱柱外接球的表面积为$S=4\pi R^2=32\pi$. ....4 分

（2）由题意知，$BM=A_1M=4$，$A_1B=2\sqrt{7}$，

$\therefore S_{\Delta A_1BM}=3\sqrt{7}, S_{\Delta B_1BM}=4\sqrt{3}$, ...6 分

设点B_1到平面A_1BM的距离为d,

$\therefore V_{B_1-A_1BM}=V_{A_1-BB_1M}$,

$\therefore \frac{1}{3}\times S_{\Delta A_1BM}\times d=\frac{1}{3}\times S_{\Delta B_1BM}\times 3,$

$\therefore d=\frac{4\sqrt{21}}{7}.$ ……………………………………………………………10 分

（3）在平面ACC_1A_1中，延长A_1M、AC，使得$A_1M\cap AC=N$，连接BN，

$\because$ 直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，M为CC_1的中点

$\therefore BC=\frac{1}{2}AN$， ，

$\therefore AB\perp BN.$

又$\because$ 直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AA_1\perp$平面ABC，

$\therefore \angle A_1BA$即为平面A_1BM与平面$A_1B_1C_1$所成的角. ……………………15 分

在ΔABA_1中，$AB=2\sqrt{3}, A_1B=2\sqrt{7},$

$\therefore \cos\angle ABA_1=\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}.$

平面A_1BM与平面$A_1B_1C_1$所成角的余弦值是$\frac{\sqrt{21}}{7}.$ …………………17 分

19. 解：（1）$\alpha=\langle\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\rangle=\frac{\pi}{3}$，$\overrightarrow{OP}=(3,2)=3\overrightarrow{e_1}+2\overrightarrow{e_2}$

$|\overrightarrow{OP}|^2=(3\overrightarrow{e_1}+2\overrightarrow{e_2})^2=9+4+12\times\cos\frac{\pi}{3}=19$，$|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{19}$ ………………3 分

（2）$|\vec{a}|^2=(-\overrightarrow{e_1}+2\overrightarrow{e_2})^2=1+4-4\cos\alpha=5-4\cos\alpha$，$|\vec{a}|=\sqrt{5-4\cos\alpha}$

同理：$|\vec{b}|=\sqrt{5-4\cos\alpha}$

又：$\vec{a}\cdot\vec{b}=(-\overrightarrow{e_1}+2\overrightarrow{e_2})\cdot(-2\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2})=4-5\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}=4-5\cos\alpha$

$\therefore \cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{1}{2}=\frac{4-5\cos\alpha}{5-4\cos\alpha}$，$\cos\alpha=\frac{1}{2},\alpha=\frac{\pi}{3}$ ………………7 分

（3）在$\frac{\pi}{3}$–仿射坐标系中，设$B(m,0),\mathrm{C}(0,n)$，$\because \overrightarrow{OD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$，$\therefore D(0,\mathrm{n})$

又$\because E,F$ 分别为BD，BC中点，

$\therefore 2\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\left(m,\frac{n}{3}\right)=m\overrightarrow{e_1}+\frac{n}{3}\overrightarrow{e_2}$

$\therefore 2\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=(m,n)=m\overrightarrow{e_1}+n\overrightarrow{e_2}$ ················9 分

$2\overrightarrow{OE}\cdot 2\overrightarrow{OF}=\left(m\overrightarrow{e_1}+\frac{n}{3}\overrightarrow{e_2}\right)\cdot\left(m\overrightarrow{e_1}+n\overrightarrow{e_2}\right)=m^2+\frac{n^2}{3}+\frac{2mn}{3}$，

即 $\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OF}=\frac{1}{4}\left(m^2+\frac{n^2}{3}+\frac{2mn}{3}\right)=\frac{3m^2+n^2+2mn}{12}$ ················11 分

又 $\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{3}\ \therefore \Delta OBC$ 中，$\angle BOC=\frac{\pi}{3}$，$|BC|=\sqrt{3}$,有正弦定理可得：

$\frac{BC}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{OC}{\sin\left(C+\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{OB}{\sin C}$，$\therefore m=2\sin C, n=2\sin\left(C+\frac{\pi}{3}\right)$

又 $|BC|^2=|OB|^2+|OC|^2-2|OB||OC|\cos\angle BOC$，$\therefore m^2+n^2-mn=3$ ·········14 分

$$\therefore \overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OF}=\frac{5m^2+3n^2-6}{12}=\frac{5\times 4\sin^2 C+3\times 4\sin^2\left(C+\frac{\pi}{3}\right)-6}{12}=\frac{10+3\sqrt{3}\sin 2C-7\cos 2C}{12}$$

$$=\frac{5+\sqrt{19}\sin(2C-\varphi)}{6}\quad\left(\text{其中}\tan\varphi=\frac{7\sqrt{3}}{9}\right)$$

所以：$\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OF}$ 的最大值为 $\frac{5+\sqrt{19}}{6}$ ················17 分