郑州市2025年高中毕业年级第三次质量预测

数学　评分参考

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	C	A	D	A	D	D	C

二、多选题：本题共3小题，每小题6分，共18分.

题号	9	10	11
答案	AC	BD	ABD

三、填空题：本大题共3小题，每小题5分，共计15分.

12. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$或$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　13. $\frac{2}{3}$　　14. -1

四、解答题：本题共5小题，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.(13分）解：设服务器触发警报时其处于故障状态设为事件A，服务器未触发报警记时其处于故障状态记为B.

（1）由题意可知，$n(\Omega)=500$；$n(A)=475$，

由古典概型知识可知，$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{475}{500}=0.95$ 4分

（2）$\because P(A)=0.95$，$\therefore P(\overline{A})=1-P(A)=0.05$，

又$n(B)=50$，$\therefore P(B)=\frac{n(B)}{n(\Omega)}=\frac{50}{500}=0.1$.

$\therefore P(\overline{B})=1-P(B)=0.9$

.....6分

方案甲：触发警报的服务器深度检修的经济损失的数学期望为：

$E_1=0.95\times6+0.05\times3=5.85$（千元）.

未触发警报的服务器保持运行的经济损失的数学期望为：

$E_2=10\times0.1+0\times0.9=1$（千元）.

$\therefore E_{甲}=E_1+E_2=6.85$（千元）.....8分

方案乙:触发警报的服务器快速诊断的经济损失的数学期望为：

$E_3 = 0.95\times 4 + 0.05\times 1 = 3.85$（千元）.

所以，$E_{乙} = E_2 + E_3 = 1 + 3.85 = 4.85$（千元）.....10 分

方案丙：未触发警报的服务器快速诊断的经济损失的数学期望为：

$E_4 = 0.1\times 4 + 0.9\times 1 = 1.3$（千元），

所以，$E_{丙} = E_1 + E_4 = 5.85 + 1.3 = 7.15$（千元）.....12 分

$\because E_{乙} < E_{甲} < E_{丙}$，所以应该选择方案乙.....13 分

16.（15 分）解：（1）$f'(x) = e^x(ax - 1 + a)$，.....1 分

又 $x = -\frac{1}{2}$ 是函数 $f(x)$ 的极值点，所以 $f'(-\frac{1}{2}) = e^x(-\frac{1}{2}a - 1 + a) = e^x(\frac{1}{2}a - 1) = 0$，

即 $a = 2$. .....5 分

此时 $f'(x) = e^x(2x + 1)$，

$f'(x) = e^x(2x+1) > 0$，$x > -\frac{1}{2}$；$f'(x) = e^x(2x+1) < 0$，$x < -\frac{1}{2}$，

所以函数 $f(x)$ 在区间 $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减，在区间 $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上单调递增，

所以，$x = -\frac{1}{2}$ 是函数 f（x）的极小值点.....7 分

（2）由（1）可知 $g(x) = f(x) - m(x-1) = e^x(2x-1) - m(x-1)$ 有两个零点，

即方程 $g(x) = e^x(2x-1) - m(x-1) = 0$ 有两个解.

当 $x = 1$ 时，$g(1) = e \neq 0$.,.....8 分

当 $x \neq 1$ 时，$e^x(2x-1) = m(x-1)$，即 $m = \frac{e^x(2x-1)}{x-1}$.

设 $h(x) = \frac{e^x(2x-1)}{x-1}$，函数 $g(x)$ 零点个数为函数 $y = h(x)$ 的图象与直线 $y = m$ 的交点个数.

.....9 分

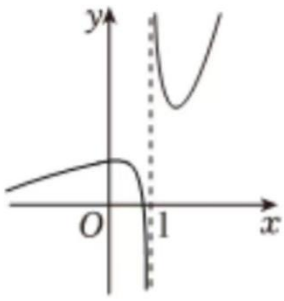
$h'(x) = \frac{e^x(2x^2 - 3x)}{(x-1)^2}$，$x \neq 1$，

$h'(x) > 0$，$x > \frac{3}{2}$ 或 $x < 0$；$h'(x) < 0$，$0 < x < \frac{3}{2}$ 且 $x \neq 1$.

所以函数 $h(x)$ 在区间 $(0,1)$ 和 $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ 上单调递减，在区间 $(-\infty, 0)$ 和 $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$ 上单调递增.

.....12 分

当 $x\to-\infty$ 时， $h(x)\to 0$；当 $x\to+\infty$ 时， $h(x)\to+\infty$；如图所示



$h(0)=1$， $h(\frac{3}{2})=4e^{\frac{3}{2}}$，

函数 $y=h(x)$ 的图象与直线 $y=m$ 有两个交点，即 $0<m<1$ 或 $m>4e^{\frac{3}{2}}$，

即 $0<m<1$ 或 $m>4e^{\frac{3}{2}}$ 时，函数 $g(x)=f\left(x\right)-m\left(x-1\right)$ 有两个零点.....15 分

17.（15 分）解：（1）由题意可知， $a_{n+1}=-a_n+\frac{3}{2}\times(\frac{1}{2})^n$，

可得 $a_{n+1}-\frac{1}{2^{n+1}}=-(a_n-\frac{1}{2^n})$， .....3 分

又 $a_1-\frac{1}{2}=-1$，故数列 $\left\{a_n-\frac{1}{2^n}\right\}$ 是以 -1 为首项，以 -1 为公比的等比数列，

所以 $a_n=\left(-1\right)^n+\frac{1}{2^n}$ .....6 分

（2）由（1）可得 $b_n=na_n=(-1)^n n+\frac{n}{2^n}$， .....7 分

所以， $S_n=-1+2-3+4-\cdots+(-1)^n n+\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\cdots+\frac{n}{2^n}$，

当 n 为奇数时， $S_n=\frac{-1-n}{2}+\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\cdots+\frac{n}{2^n}$ （1），

$\frac{1}{2}S_n=\frac{-n-1}{4}+\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots+\frac{n-1}{2^n}+\frac{n}{2^{n+1}}$ （2），

由(1)−(2)得 $\frac{1}{2}S_n=\frac{-n-1}{4}+1-\frac{n+2}{2^{n+1}}$，

所以， $S_n=\frac{3-n}{2}-\frac{n+2}{2^n}$

.....9 分

所以， $-\lambda<\frac{3-n}{2}-\frac{2}{2^n}+\frac{n}{2}$，

所以， $\lambda>\frac{2}{2^n}-\frac{3}{2}$，所以 $\lambda>\frac{2}{2}-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$， .....10 分

当 n 为偶数时， $S_n=\frac{n}{2}+\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\cdots+\frac{n}{2^n}$，同理求和可得， $S_n=\frac{n+4}{2}-\frac{n+2}{2^n}$， .....12 分

所以， $\lambda<\frac{n+4}{2}-\frac{n+2}{2^n}+\frac{n}{2^n}+\frac{n}{2}=2+n-\frac{1}{2^{n-1}}$，

故， $\lambda<\frac{7}{2}$

.....14 分

综上，$\lambda\in(-\frac{1}{2},\frac{7}{2})$ .....15 分

18.（17 分）解：（1）依题意得，点 M 在抛物线上，且 $|MF|=\frac{7}{4}$，

所以，$\frac{p}{2}+\frac{5}{4}=\frac{7}{4}$，所以可得 $p=1$，.....3 分

所以，E 的方程为 $y^2=2x$. .....4 分

（2）抛物线方程为 $y^2=2x$，焦点坐标为 $F(\frac{1}{2},0)$，

设 l_1：$x=my+\frac{1}{2}$，l_2：$x=-\frac{1}{m}y+\frac{1}{2}$，.....5 分

$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),P(x_3,y_3),Q(x_4,y_4)$，

（ⅰ）由 $\begin{cases}y^2=2x,\\ x=my+\frac{1}{2},\end{cases}$，消去 x 得 $y^2-2my-1=0$，

$\Delta=m^2+4>0$，$y_1+y_2=2m$，$y_1y_2=-1$，

所以，$S_1=\frac{1}{2}|OF||y_1-y_2|=\frac{1}{4}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{1}{4}\sqrt{4m^2+4}$，.....7 分

同理，$S_2=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{4}{m^2}+4}$ .....8 分

所以，$S_1S_2=\frac{1}{4}\sqrt{(m^2+1)(\frac{1}{m^2}+1)}=\frac{1}{4}\sqrt{m^2+\frac{1}{m^2}+2}\geq\frac{1}{2}$，

当且仅当 $m^2=\frac{1}{m^2}$ 时等号成立，

故，S_1S_2 的最小值为 $\frac{1}{2}$. .....10 分

（ⅱ）不妨设 $m>0$，由题意可知 $l_{AP}:y-y_1=\frac{y_1-y_3}{x_1-x_3}(x-x_1)$，

又 $y_1^2=2x_1$，$y_3^2=2x_3$，所以，AP 的直线方程可化为：$y-y_1=\frac{2}{y_1+y_3}(x-x_1)$，

又 $x_C=\frac{1}{2}$，故可得 $y_C=\frac{1+y_1y_3}{y_1+y_3}$，

又 $y_1y_2=y_3y_4=-1$，所以可得 $y_D=-\frac{1+y_1y_3}{y_1+y_3}$，

可得 $y_C+y_D=0$，所以可得 CD 的中点恒为 F，.....13 分

以 CD 为直径的圆与 y 轴相切等价于 $y_C=\frac{1}{2}$，

若 $y_C=\frac{1}{2}$，则 $\frac{1}{2}=\frac{1+y_1y_3}{y_1+y_3}$，所以，$2y_1y_3+2=y_1+y_3$，

又 $l_1\perp l_2$，所以 $\frac{2}{y_1+y_2}\cdot\frac{2}{y_3+y_4}=-1$，故（$y_1-\frac{1}{y_1}$)($y_3-\frac{1}{y_3}$) $=-4$，

整理可得（$y_1y_3)^2-(y_1^{\ 2}+y_3^{\ 2})+1=-4y_1y_3$，

即（$y_1y_3+1)^2=(y_1-y_3)^2$,所以，$y_1y_3+1=y_1-y_3$.

又 $2y_1y_3+2=y_1+y_3$，故可得 $y_1=3y_3$.　.....15 分

代入方程 $y_1y_3+1=y_1-y_3$ 可得，$3y_3^{\ 2}-2y_3+1=0$，

又，$\Delta=4-12=-8<0$，

故不存在以 CD 为直径的圆与 y 轴相切.....17 分

19.（17 分）

解：（1）根据题意，平面的法向量 $\vec{n_1}=(1,-1,-1)$，　.....1 分

在平面 $x-y-z-4=0$ 上任取点 $M(4,0,0)$，可得 $\overrightarrow{OM}=(4,0,0)$，

设原点 O 到平面 $x-y-z-4=0$ 的距离为 d，则 $d=\frac{|\overrightarrow{OM}\cdot\vec{n_1}|}{|\vec{n_1}|}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，

故原点 O 到平面 $x-y-z-4=0$ 的距离为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.....4 分

（2）由点到直线的距离公式 $d=\frac{|A'x_0+B'y_0+D'|}{\sqrt{A'^2+B'^2}}$，

类比：点平面的距离公式为 $d=\frac{|A'x_0+B'y_0+C'z_0+D'|}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$，.....6 分

证明如下：

不妨设 $C\neq0$，在平面 $A'x+B'y+C'z+D'=0$ 内取一点 $Q\left(0,0,-\frac{D'}{C'}\right)$，

则向量 $\overrightarrow{QP}=\left(x_0,y_0,z_0+\frac{D'}{C'}\right)$，

取平面 $A'x+B'y+C'z+D'=0$ 的一个法向量 $\vec{n}=(A',B',C')$，

所以点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $A'x+B'y+C'z+D'=0$ 的距离为：

$d=\dfrac{\left|\overrightarrow{QP}\cdot\vec{n}\right|}{|\vec{n}|}=\dfrac{|A'x_0+B'y_0+C'z_0+D'|}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$ .....9 分

（3）$\overrightarrow{EF}=(1,1,1)$，$\overrightarrow{FG}=(1,1,-1)$

设 $\vec{p}=(i,j,r)$ 为平面 ADD_1A_1 的一个法向量，则 $\begin{cases}\overrightarrow{EF}\cdot\vec{p}=i+j+r=0,\\ \overrightarrow{EG}\cdot\vec{p}=i+j-r=0,\end{cases}$ 令 $i=1$，得 $j=-1$，$r=0$

所以 $\vec{p}=(1,-1,0)$．.....10 分

因为平面 CDD_1C_1 的方程为 $x-2y+z-2=0$，所以由（2）知平面 CDD_1C_1 的一个法向量为

$\vec{q}=(1,-2,1)$，.....11 分

设直线 DD_1 的一个方向向量为 $\vec{t}=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}\vec{t}\cdot\vec{p}=x_1-y_1=0,\\ \vec{t}\cdot\vec{q}=x_1-2y_1+z_1=0.\end{cases}$

令 $x_1=1$，得 $y_1=1$，$z_1=1$ 所以 $\vec{t}=(1,1,1)$．.....13 分

因为 DD_1 // 平面 ACC_1A_1，所以平面 ACC_1A_1 的一个法向量 $\vec{s}=(k,-t,-2)$ 与直线 DD_1 的方向向量 $\vec{t}=(1,1,1)$ 垂直，所以 $\vec{s}\cdot\vec{t}=k-t-2=0$，.....14 分

所以平面 CDD_1C_1 与平面 ACC_1A_1 夹角的余弦值为

$$\frac{|\vec{q}\cdot\vec{s}|}{|\vec{q}||\vec{s}|}=\frac{|k+2t-2|}{\sqrt{k^2+t^2+4}\sqrt{6}}=\frac{|3t|}{\sqrt{2t^2+4t+8}\sqrt{6}}$$

$$=\frac{3t}{2\sqrt{3}\sqrt{t^2+2t+4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{t^2}{t^2+2t+4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{1}{1+2\frac{1}{t}+4\frac{1}{t^2}}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{1}{4\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{4}}}$$

又 $1\rightleftharpoons t\rightleftharpoons 2$，$\dfrac{1}{2}\rightleftharpoons\dfrac{1}{t}\rightleftharpoons 1$，$\dfrac{|\vec{q}\cdot\vec{s}|}{|\vec{q}||\vec{s}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\dfrac{1}{4\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{4}}}\rightleftharpoons\dfrac{1}{2}$

平面 CDD_1C_1 与平面 ACC_1A_1 夹角的余弦值的最大值为 $\dfrac{1}{2}$．.....17 分