郑州市 2025 年高中毕业年级第二次质量预测

数学 评分参考

一、单选题（每小题 5 分，共 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	B	C	D	A	A	C	D

二、多选题（每小题 6 分，共 18 分）

题号	9	10	11
答案	ABC	AD	ABD

三、填空题（每小题 5 分，共 15 分）

12. （1,1），（0,2），（0，-2），（2,0），（-2,0）（答案不唯一，写出任意一个都对）；

13. $\frac{5\sqrt{7}}{7}$;　　　　14. 2.

四、解答题

15.解：（1）列联表如下：

	近视人数	未近视人数	合计
户外活动时间不足 2 小时	35	10	45
户外活动时间超过 2 小时	25	30	55
合计	60	40	100

……………………………………………………………………………2 分

零假设为 H_0：学生患近视与户外活动时间长短无关.　……………………………3 分

根据列联表中的数据，经计算得到

$\chi^2=\frac{100\times(35\times30-25\times10)^2}{60\times40\times45\times55}=\frac{3200}{297}\approx10.774>7.897=x_{0.005}$，　……………………………6 分

根据小概率值 $\alpha=0.005$ 的独立性检验，我们推断 H_0 不成立，即认为学生患近视与户外活动时间长短有关联，此推断犯错误的概率不大于 0.005.　……………………………7 分

（2）设事件 A＝“使用“物理十药物”治疗方案并且治愈”，事件 B_1＝“该近视同学每天户外活动时间超过 2 小时”，B_2＝“该近视同学每天户外活动时间不足 2 小时”，则

$P(B_1)=\frac{25}{60}=\frac{5}{12},P(B_2)=\frac{35}{60}=\frac{7}{12}$，且 $P(A|B_1)=\frac{5}{6},P(A|B_2)=\frac{2}{3}$，……………………………10 分

则 $P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)=\frac{5}{12}\times\frac{5}{6}+\frac{7}{12}\times\frac{2}{3}=\frac{53}{72}$，

所以该近视学生使用“物理十药物”治疗方案被治愈的概率为 $\frac{53}{72}$.　……………………………13 分

16. 解：（1）由正弦定理得 $\sin B(\cos A+\sqrt{3}\sin A)=\sin A+\sin C$，..............................2 分

$\therefore \sin B\cos A+\sqrt{3}\sin B\sin A=\sin A+\sin(A+B)$，

$\therefore \sqrt{3}\sin B\sin A=\sin A+\sin A\cos B$，

$\because \sin A\neq 0,\quad \therefore \sqrt{3}\sin B=1+\cos B$，..4 分

$\therefore \sin(B-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$.

$\because -\frac{\pi}{6}<B-\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}\quad \therefore B-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$,即$B=\frac{\pi}{3}$. ....6 分

（2）（i）$\because \overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$, ...8 分

$\therefore \left|\overrightarrow{BE}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{BA}\right|^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\left|\overrightarrow{BC}\right|^2}=\frac{\sqrt{39}}{2}$. ....10 分

（ii）在ΔBCF中，由余弦定理得$CF^2=BC^2+BF^2-CF^2=\frac{\sqrt{21}}{2}$，..................................11 分

（法一）由题知 M 是 ΔABC 的重心，

$\therefore CM=\frac{2}{3}CF=\frac{\sqrt{21}}{3}$，$\therefore BM=\frac{2}{3}BE=\frac{\sqrt{39}}{3}$，..13 分

在ΔBMC中，由余弦定理得$\cos\angle BMC=\frac{BM^2+CM^2-BC^2}{2BM\cdot CM}=\frac{4\sqrt{91}}{91}$. ....15 分

（法二）又$\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}$，

$\therefore \overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CF}=(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC})\cdot(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC})=\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{BA}\right|^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC}\right|^2=3$. .... 13 分

$\therefore \cos\angle EMF=\cos<\overrightarrow{BE},\overrightarrow{CF}>=\frac{\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CF}}{\left|\overrightarrow{BE}\right|\left|\overrightarrow{CF}\right|}=\frac{4\sqrt{91}}{91}$. ....15 分

17.解：（1）解：（1）当 $a=2$ 时，$f(x)=(2-x)e^x$, $f'(x)=(1-x)e^x=1$, ...1 分

即$1-x=e^{-x}$, 令 $\varphi(x)=e^{-x}+x-1$, $\varphi'(x)=-e^{-x}+1=\frac{e^x-1}{e^x}$, ...2 分

令 $\varphi'(x)>0$, 得 $x>0$，令 $\varphi'(x)<0$, 得 $x<0$，所以 $\varphi_{\min}(x)=\varphi(0)=0$, 即 $x=0$，.......4 分

$f(0)=2$, 所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为 $y=x+2$. ....6 分

（2）由 $f(x)=(a-x)e^x>1-x$ 得，$ae^x>xe^x-x+1$，即 $a>x-\frac{x-1}{e^x}$ 没有整数解.

……………………………………………7 分

设 $h(x)=x-\frac{x-1}{e^{x}}$，$h'(x)=1-\frac{2-x}{e^{x}}=\frac{e^{x}+x-2}{e^{x}}$，…………………………………………………8 分

设 $t(x)=e^{x}+x-2$，$t'(x)=e^{x}+1>0$，所以 $t(x)$ 单调递增，

且 $t(0)=-1$，$t(1)=e-2>0$，

所以存在唯一的 $x_0\in(0,1)$，使 $t(x_0)=0$，即 $h'(x_0)=0$，

当 $x\in(-\infty,x_0)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，……………………………………………………11 分

又 $h(0)=h(1)=1$，所以当 $x\in Z$ 时，$h(x)\ge 1$，…………………………………………………13 分

当 $a\le 1$ 时，$a>h(x)$ 没有整数解，即 $f(x)>1-x$ 没有整数解. ……………………………15 分

18.解：（1）由题意得 $\begin{cases}a_1+(2n-1)d=2a_1+2(n-1)d+1,\\4a_1+6d=4(a_1+2d-1),\end{cases}$ ……………………………………………………2 分

解得 $\begin{cases}a_1=1,\\d=2.\end{cases}$ ………………………………………………………………………………………………4 分

$\therefore\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n-1$. ……………………………………………………………………………5 分

（2）（i）$\because b_n=\begin{cases}k,n=2k-1,\\b_{n-1}+k,n=2k,\end{cases}$ 其中 k 是正整数，……………………………………………………6 分

$\therefore b_1=1$，$b_2=b_1+1=2$，$b_3=2$，$b_4=b_3+2=4$. …………………………………………………………10 分

（ii）

$\sum_{i=1}^{2^n}b_i=b_1+b_2+b_3+\dots+b_{2^n}=(b_1+b_3+b_5+\dots+b_{2^n-1})+(b_2+b_4+b_6+\dots+b_{2^n})$

$=(b_1+b_3+b_5+\dots+b_{2^n-1})+[(b_1+1)+(b_3+2)+(b_5+3)+\dots+(b_{2^n-1}+2^{n-1})]$……………………………14 分

$=2(b_1+b_3+b_5+\dots+b_{2^n-1})+(1+2+3+\dots+2^{n-1})$

$=3(1+2+3+\dots+2^{n-1})$

$=3\times\frac{2^{n-1}(1+2^{n-1})}{2}$

$=3(2^{n-2}+2^{2n-3})$. ....17 分

19.解：（1）连接 $E_1E_3, E_3E_2, E_2E_4, E_4E_1$，因为 $E_3E_2 \underline{\underline{/\!/}} \frac{1}{2}BD, E_1E_4 \underline{\underline{/\!/}} \frac{1}{2}BD$，

所以 $E_3E_2 \underline{\underline{/\!/}} E_1E_4$，四边形 $E_1E_3E_2E_4$ 为平行四边形，

又 $E_1E_3 \underline{\underline{/\!/}} \frac{1}{2}AC$，$AC=BD$，所以 $E_1E_3=E_3E_2$，所以四边形 $E_1E_3E_2E_4$ 为菱形，

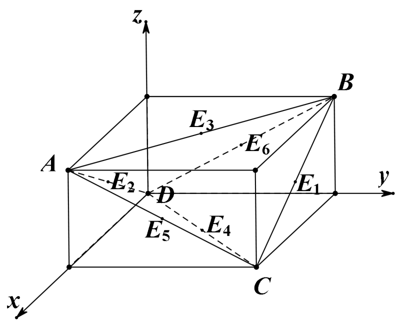
所以 $E_1E_2 \perp E_3E_4$，..2 分

同理，四边形 $E_1E_5E_2E_6$ 为菱形，$E_1E_2 \perp E_5E_6$，..3 分

又因为四边形 $E_3E_5E_4E_6$ 为菱形，E_3E_4, E_5E_6 交于一点，

所以 $E_1E_2 \perp$ 平面 $E_3E_5E_4E_6$. ....4 分

（2）如图，将该三棱锥补全为一个长方体，并建立空间直角坐标系 $D-xyz$，.....5 分



由 $E_1E_2=\sqrt{6}, E_3E_4=E_5E_6=2$，得 $A(2,0,2), B(0,\sqrt{6},2), C(2,\sqrt{6},0)$,

$\overrightarrow{AB}=(-2,\sqrt{6},0), \overrightarrow{AC}=(0,\sqrt{6},-2)$,

设平面 ABC 的一个法向量为 $\overrightarrow{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases} \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{m}=-2x+\sqrt{6}y=0, \\ \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{m}=\sqrt{6}y-2z=0, \end{cases}$ 令 $y=2$，得 $\overrightarrow{m}=(\sqrt{6},2,\sqrt{6})$，.......................................7 分

$\overrightarrow{DB}=(0,\sqrt{6},2), \overrightarrow{DC}=(2,\sqrt{6},0)$,

设平面 BCD 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases} \overrightarrow{DB}\cdot\vec{n}=\sqrt{6}y+2z=0, \\ \overrightarrow{DC}\cdot\vec{n}=2x+\sqrt{6}y=0, \end{cases}$ 令 $y=-2$，得 $\vec{n}=(\sqrt{6},-2,\sqrt{6})$，.......................................8 分

所以$\cos<\vec{m},\vec{n}>=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{6-4+6}{\sqrt{6+4+6}\cdot\sqrt{6+4+6}}=\dfrac{8}{16}=\dfrac{1}{2}$. ……………………………………………9 分

所以二面角$A-BC-D$的大小为$\dfrac{\pi}{3}$. ……………………………………………………………………10 分

（3）由（2）知可将$P-MNO$补成长方体，设长宽高分别设为a,b,c，

则外接球半径为该长方体的体对角线长的一半，即：$R=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$，

$S=4\pi R^2=\pi(a^2+b^2+c^2)$，

$MN^2=a^2+b^2,NO^2=b^2+c^2,MO^2=a^2+c^2$，则$S=\dfrac{1}{2}(MN^2+MO^2+NO^2)\pi$，………………11 分

在xOy平面内设$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，由$\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+y^2=1\\x=my+1\end{cases}$，得$(m^2+2)y^2+2my-1=0$，

显然$\Delta=\left(2m\right)^2+4(2+m^2)=8m^2+8>0$，

$y_1+y_2=-\dfrac{2m}{2+m^2},y_1y_2=-\dfrac{1}{2+m^2}$， ……………………………………………………………12 分

于是$MN^2=(1+m^2)(y_1-y_2)^2=(1+m^2)\dfrac{8(1+m^2)}{(m^2+2)^2}=\dfrac{8(1+m^2)^2}{(m^2+2)^2}$,

$MO^2+NO^2=x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2=2-2y_1^2+y_1^2+2-2y_2^2+y_2^2=4-(y_1^2+y_2^2)$

$=4-(y_1+y_2)^2+2y_1y_2=\dfrac{4m^4+10m^2+12}{(m^2+2)^2}$,

所以$S=\dfrac{1}{2}(MN^2+MO^2+NO^2)\pi=\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{12m^4+26m^2+20}{(m^2+2)^2}=\dfrac{6m^4+13m^2+10}{(m^2+2)^2}\cdot\pi$

………13 分

在$\triangle MNO$中，$\cos\angle MON=\dfrac{MO^2+NO^2-MN^2}{2MO\cdot NO}=\dfrac{c^2}{MO\cdot NO}>0$，则$\angle MON$为锐角，

因此$\overline{OM}\cdot\overline{ON}>0$，即$x_1x_2+y_1y_2>0$，

$x_1x_2+y_1y_2=(my_1+1)(my_2+1)+y_1y_2=(m^2+1)y_1y_2+m(y_1+y_2)+1$

$=\dfrac{-(m^2+1)}{m^2+2}-\dfrac{2m^2}{m^2+2}+1>0$，解得$m^2<\dfrac{1}{2}$， ……………………………………………14 分

又$S=\dfrac{6(m^4+4m^2+4)-11m^2-14}{(m^2+2)^2}\pi=[6-\dfrac{11m^2+14}{(m^2+2)^2}]\pi$，

不妨令$t=m^2+2\in[2,\frac{5}{2})$，则$S=[6-\frac{11}{t}+\frac{8}{t^2}]\pi=[8(\frac{1}{t}-\frac{11}{16})^2+6-\frac{121}{32}]\pi$，

$\because \frac{2}{5}<\frac{1}{t}\le\frac{1}{2}$，$\therefore$当$\frac{1}{t}=\frac{1}{2}$时，$S_{\min}=\frac{5}{2}\pi$.

此时$m=0$，所以S的最小值为$\frac{5}{2}\pi$，此时直线方程为$x=1$． 17分