

# 郑州市 2025 年高中毕业年级第一次质量预测

## 数学 评分参考

### 一、单选题

|    |   |   |   |   |   |   |   |   |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 答案 | A | C | C | B | A | C | C | D |

### 二、多选题

|    |    |     |     |
|----|----|-----|-----|
| 题号 | 9  | 10  | 11  |
| 答案 | AD | ACD | BCD |

### 三、填空题

12. 12;    13.  $12-8\sqrt{2}$ ;    14. 216.

### 四、解答题:

15. (1) 在  $\triangle ABC$  中,  $A+B=\pi-C$ ,

$$\because b^2+c^2-a^2=\sqrt{2}bc, \text{ 所以 } \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\sqrt{2}bc}{2bc}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore A=\frac{\pi}{4}. \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\because 2\sin(C-A)=\sin B, \therefore 2\sin\left(C-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{4}-C\right),$$

$$\text{展开并整理得 } \sqrt{2}(\sin C-\cos C)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos C+\sin C),$$

$$\text{得 } \sin C=3\cos C, \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

又  $\sin^2 C+\cos^2 C=1$ , 且  $\sin C>0$ ,

$$\therefore \sin C=\frac{3\sqrt{10}}{10}. \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 由正弦定理得 } \frac{BC}{\sin A}=\frac{AB}{\sin C},$$

$$\text{得 } AB=\frac{BC}{\sin A}\times\sin C=\frac{10}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}=6\sqrt{5}, \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$



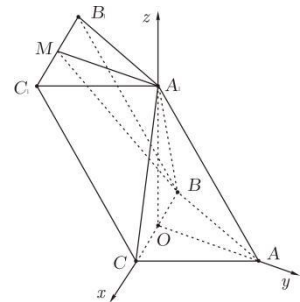
$\therefore A_1B \perp \text{面}ABC, \therefore A_1B \perp AO,$

又 $\because A_1B \cap BC = B, \therefore AO \perp \text{面}A_1BC,$  .....4 分

$\therefore AO$ 即为点  $A$  到平面  $A_1BC$  的距离.

又 $\because \triangle ABC$  为等腰直角三角形, 且  $AB=AC=2, \therefore AO = \sqrt{2}.$

$\therefore$  点  $A$  到平面  $A_1BC$  的距离为  $\sqrt{2}.$  .....6 分



(2)如图, 取  $BC$  的中点  $O$ , 连接  $AO, A_1O$ ,

$\because A_1$  在底面  $ABC$  内的射影为  $BC$  的中点,  $\therefore A_1O \perp \text{面}ABC$ .

$\because \triangle ABC$  为等腰三角形,  $AB=AC, \therefore AO \perp BC.$ 建立如图所示的空间直角坐标系, 易知  $A_1O = \sqrt{14} \therefore M(0, -\sqrt{2}, \sqrt{14}), B(-\sqrt{2}, 0, 0), A_1(0, 0, \sqrt{14}), B_1(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{14}),$

$\therefore \overrightarrow{MB} = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{14}), \overrightarrow{BA_1} = (\sqrt{2}, 0, \sqrt{14}), \overrightarrow{BB_1} = (0, -\sqrt{2}, \sqrt{14}).$  .....8 分

设平面  $MBA_1$  的一个法向量为  $\vec{n}_1 = (x, y, z),$

由  $\begin{cases} -\sqrt{2}x + \sqrt{2}y - \sqrt{14}z = 0 \\ \sqrt{2}x + \sqrt{14}z = 0 \end{cases},$  得  $\vec{n}_1 = (-\sqrt{7}, 0, 1),$  .....10 分

设平面  $BCC_1B_1$  的一个法向量为  $\vec{n}_2 = (x, y, z),$

由  $\begin{cases} -\sqrt{2}x + \sqrt{2}y - \sqrt{14}z = 0 \\ -\sqrt{2}y + \sqrt{14}z = 0 \end{cases},$  得  $\vec{n}_2 = (0, \sqrt{7}, 1),$  .....12 分

则  $\left| \cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle \right| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{1}{8},$  .....14 分

平面  $A_1MB$  与平面  $BCC_1B_1$  夹角的余弦值为  $\frac{1}{8}.$  .....15 分

18.(1) $\because f(x) = \log_a x$  关于  $y=x$  对称的函数为  $y=a^x, \therefore g(x) = a^x.$  .....2 分

设  $y=f(x)$  与  $y=g(x)$  有公共点  $(x_0, y_0),$  由对称性可知,  $(x_0, y_0)$  在  $y=x$  上,

$\because f'(x) = \frac{1}{x \ln a}, g'(x) = a^x \ln a,$

$$\therefore \begin{cases} \frac{1}{x_0 \ln a} = a^{x_0} \ln a = 1 \\ y_0 = a^{x_0} = \log_a x_0 \end{cases} \text{ 解得 } x_0 = \frac{1}{\ln a}, \text{ 得 } a = e^{\frac{1}{e}},$$

$\therefore a$  的值为  $e^{\frac{1}{e}}$ . .....5 分

(2) 由(1)知,  $g(x) = a^x$ , 由  $a^x = x^a (a > 0, a \neq 1)$ ,  $x \in (0, +\infty)$

两边同取对数,  $x \ln a = a \ln x$ , 即  $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln a}{a}$  .....7 分

令  $y = \frac{\ln x}{x}$ ,  $y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ ,  $\therefore$  函数  $y = \frac{\ln x}{x}$  在  $(0, e)$  上单调递增, 在  $(e, +\infty)$  上单调递减.

当  $0 < a < 1$ , 方程  $g(x) - x^a = 0$  在  $(0, +\infty)$  上实数解的个数为 1 个.

当  $a > 1, a \neq e$ , 方程  $g(x) - x^a = 0$  在  $(0, +\infty)$  上实数解的个数为 2 个.

当  $a = e$ , 方程  $g(x) - x^a = 0$  在  $(0, +\infty)$  上实数解的个数为 1 个 .....10 分

(3)  $\because F(x) = 2\sqrt{x} - \ln x$ , 定义域为  $(0, +\infty)$ , 求导得,  $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$

又  $\because F'(x_1) = F'(x_2)$ ,  $\therefore \frac{1}{\sqrt{x_1}} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{\sqrt{x_2}} - \frac{1}{x_2}$ ,

整理得  $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{x_1 x_2}$ , .....13 分

由基本不等式得,  $x_1 x_2 > 16$ , .....14 分

$\therefore F(x_1) + F(x_2) = 2\sqrt{x_1 x_2} - \ln x_1 x_2$ , 设  $\sqrt{x_1 x_2} = t (t > 4)$ , 则  $h(t) = 2t - 2\ln t$ ,

易知  $h'(t) = 2 - \frac{2}{t} = \frac{2t - 2}{t} > 0$ ,  $\therefore h(t) = 2t - 2\ln t$  在  $(4, +\infty)$  单调递增,  $\therefore h(t) > h(4) = 8 - 4\ln 2$ ,

$\therefore F(x_1) + F(x_2)$  的取值范围为  $(8 - 4\ln 2, +\infty)$ . .....17 分

19. (1) 依题意可知有如下三种情况:

若  $a_n: 0, 1, 0, 1$ , 此时  $T_n = 2$ ,

若  $a_n: 0, 1, 2, 1$ , 此时  $T_n = 4$ .

若  $a_n: 0, -1, 0, 1$ , 此时  $T_n = 0$  .....3 分

(2) 证明: 必要性: 因为  $a_n < a_{n+1} (n = 1, 2, \dots, 100)$ , 所以  $a_{n+1} - a_n = 5 (n = 1, 2, \dots, 100)$ ,

故数列  $\{a_n\} (n = 1, 2, 3, \dots, 101)$  为等差数列, 公差为 5,

所以  $a_{101} = (101-1) \times 5 = 500$ ，必要性成立； .....6 分

充分性：由于  $a_{101} - a_{100} \leq 5$ ， $a_{100} - a_{99} \leq 5$ ， $\dots$ ， $a_2 - a_1 \leq 5$ ，

累加可得， $a_{101} - a_1 \leq 500$ ，即  $a_{101} \leq a_1 + 500 = 500$ ，

因为  $a_{101} = 500$ ，故上述不等式的每个等号都取到，

所以  $a_{n+1} - a_n = 5$  ( $n=1,2,\dots,100$ )，即  $a_{n+1} > a_n$  ( $n=1,2,\dots,100$ )，充分性成立 .....9 分

综上所述，“ $a_{101} = 500$ ”是“数列  $\{a_n\}$  为递增数列”的充要条件； .....10 分

(3) 证明：令  $c_n = a_{n+1} - a_n$  ( $k=1,2,\dots,n-1$ )，依题意， $c_n = \pm 5$ ，

因为  $a_2 = a_1 + c_1$ ， $a_3 = a_1 + c_1 + c_2$ ， $\dots$ ， $a_n = a_1 + c_1 + c_2 + \dots + c_{n-1}$ ， .....12 分

所以  $T_n = na_1 + (n-1)c_1 + (n-2)c_2 + (n-3)c_3 + \dots + c_{n-1}$

$$= (n-1) + (n-2) + \dots + 1 - (1-c_1)(n-1) - (1-c_2)(n-2) - \dots - (1-c_{n-1})$$

$$= \frac{n(n-1)}{2} - [(1-c_1)(n-1) + (1-c_2)(n-2) + \dots + (1-c_{n-1})], \quad \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$

因为  $c_n = \pm 5$ ，所以  $1-c_n$  为偶数

所以  $(1-c_1)(n-1) + (1-c_2)(n-2) + \dots + (1-c_{n-1})$  为偶数；

所以要使  $T_n = 0$ ，必须使  $\frac{n(n-1)}{2}$  为偶数，即 4 整除  $n(n-1)$ ，

亦即  $n = 4k$  或  $n = 4k+1$  ( $k \in N^*$ )， .....16 分

当  $n = 4k$  ( $k \in N^*$ ) 时，

比如， $a_{4m-1} = a_{4m-3} = 0$ ， $a_{4m-2} = -5$ ， $a_{4m} = 5$  ( $m=1,2,\dots,k$ )，

或  $a_{4m-1} = a_{4m-3} = 0$ ， $a_{4m-2} = 5$ ， $a_{4m} = -5$  ( $m=1,2,\dots,k$ ) 时，有  $a_1 = 0$ ， $T_n = 0$ ；

当  $n = 4k+1$  ( $k \in N^*$ ) 时，

比如  $a_{4m-1} = a_{4m-3} = 0$ ， $a_{4m-2} = -5$ ， $a_{4m} = 5$ ， $a_{4m+1} = 0$  ( $m=1,2,\dots,k$ )，

或  $a_{4m-1} = a_{4m-3} = 0$ ， $a_{4m-2} = 5$ ， $a_{4m} = -5$ ， $a_{4m+1} = 0$  ( $m=1,2,\dots,k$ )，有  $a_1 = 0$ ， $T_n = 0$ ；

当  $n = 4k+2$  或  $n = 4k+3$  ( $k \in N$ ) 时， $n(n-1)$  不能被 4 整除， $T_n \neq 0$ . .....17 分