郑州市2024—2025学年上期期末考试

高中二年级数学　评分参考

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的，请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	D	C	D	C	A	B	A

二、多选题：本题共3小题，每小题6分，共18分，在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分.

题号	9	10	11
答案	AD	BC	ACD

三、填空题：本大题共3小题，每小题5分，共计15分.

12. 5;13. $2x+y-8=0$;14. $\dfrac{q}{p+1}$.

四、解答题：本题共5小题，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.(13分）

解：（1）设圆C的标准方程为$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，

由此可以圆心C的坐标为(a,b).因为圆心C在直线l：$x-y-1=0$上，

所以$a-b-1=0$------①

因为A，B是圆上两点，所以$|CA|=|CB|$，根据两点间的距离公式，有

$\sqrt{(a+1)^2+(b+1)^2}=\sqrt{(a+2)^2+(b-2)^2}$，即$a-3b+3=0$----------------------②

由①②可得$a=3$，$b=2$

故圆C的方程为$(x-3)^2+(y-2)^2=25$ -------------------6分

（2）由（1）知，圆心为$C(3,2)$，半径为$r=5$，

设圆心C到直线l'的距离为d，则$d=\sqrt{5^2-\left(\dfrac{8}{2}\right)^2}=3$

若直线l'的斜率不存在，则直线l'的方程为$x=0$，此时，圆心C到直线l'的距离为3，符合题意；

若直线l'的斜率存在，设直线l'的方程为$y=kx+3$，即$kx-y+3=0$，

由题意可得$\dfrac{|3k-2+3|}{\sqrt{k^2+1}}=\dfrac{|3k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=3$，解得$k=\dfrac{4}{3}$，

此时，直线l'的方程为$y=\frac{4}{3}x+3$，即$4x-3y+9=0$.

综上所述，直线l'的方程为$x=0$或$4x-3y+9=0$．-----------------13 分

16.（15 分）

解：（1）抛物线的准线方程为：$x=-\frac{p}{2}$，由题意可得$\begin{cases} y=\pm\sqrt{2p} \\ x+\frac{p}{2}=3 \\ 2p=2px \end{cases}$，整理可得：

$p=4$，$x=1, y=\pm 2\sqrt{2}$.所以抛物线为：$y^2=8x$；-----------------6 分

（2）由题意可知$A(1,2\sqrt{2})$，则直线OA的方程为：$y=2\sqrt{2}x$　------------- ①

抛物线的准线方程是$x=-2$　-------------- ②

联立①②，可得点D的纵坐标为$-4\sqrt{2}$.

因为焦点F的坐标为$(2,0)$，故直线AF的方程为

$y=2\sqrt{2}(x-2)$，　-----------③

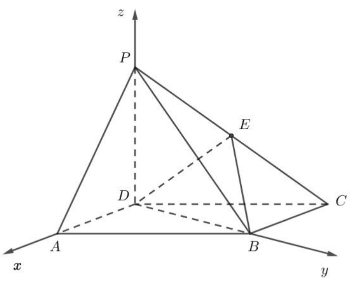
把③式和抛物线联立，即$\begin{cases} y^2=8x \\ y=-2\sqrt{2}(x-2) \end{cases}$消去$x$得

$y^2+2\sqrt{2}y-16=0$.

又因为A点的纵坐标为$2\sqrt{2}$，故可得B点的纵坐标为$-4\sqrt{2}$.

点B和点D的纵坐标相等，于是可得DB平行于x轴.-----------------15 分

17.（15 分）



（1）证明：$\because PD\perp$底面$ABCD$，$BD\subset$底面$ABCD$，$\therefore PD\perp AD$.

在$\triangle ABD$中，$AD^2+BD^2=AB^2$，即$AD\perp BD$，

又$BD\cap PD=D$，所以$AD\perp$平面PBD-----------------6 分

（2）以D为原点，DA，DB，DP所在直线分别为x轴，y轴，z轴，建立空间直角坐标系，依题意得：$A(2,0,0)$，$B(0,2\sqrt{3},0)$，$C(-2,2\sqrt{3},0)$，$D(0,0,0)$，$P(0,0,2)$.

由（1）可知，$AD\perp$平面PBD，所以平面PBD的一个法向量$\overrightarrow{n}=(1,0,0)$,

设$\overrightarrow{PE}=\lambda\overrightarrow{PC}$，设点$E$的坐标为$(x,y,z)$，则$\overrightarrow{PE}=(x,y,z-2)$，$\overrightarrow{PC}=(-2,2\sqrt{3},-2)$,

即 $\overrightarrow{PE}=(x,y,z-2)=\lambda\overrightarrow{PC}=\left(-2\lambda,2\sqrt{3}\lambda,2-2\lambda\right)$，可得点 E 的坐标为 $\left(-2\lambda,2\sqrt{3}\lambda,2-2\lambda\right)$，

所以 $\overrightarrow{DB}=\left(0,2\sqrt{3},0\right)$，$\overrightarrow{DE}=\left(-2\lambda,2\sqrt{3}\lambda,2-2\lambda\right)$.

设 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$ 是平面 BDE 的法向量，则 $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{DB}=0$，$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{DE}=0$，即

$\begin{cases}2\sqrt{3}y_1=0\\ -2\lambda x_1+2\sqrt{3}\lambda y_1+(2-2\lambda)z_1=0\end{cases}$，取 $x_1=1-\lambda$，则 $y_1=0$，$z_1=\lambda$，

所以 $\overrightarrow{n_1}=(1-\lambda,0,\lambda)$ 是平面 BDE 的一个法向量.

因为平面 PBD 与平面 BDE 的夹角为 45°，所以 $\cos45^\circ=\left|\cos<\vec{n},\overrightarrow{n_1}>\right|=\left|\dfrac{1-\lambda}{1\cdot\sqrt{(1-\lambda)^2+\lambda^2}}\right|$，

解得 $\lambda=\dfrac{1}{2}$，所以点 E 为线段 PC 的中点.-----------------15 分

18.（17 分）

（1）解：当 $n=1$ 时，$a_2=S_1+1=2$，

当 $n\geq2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(a_{n+1}-1)-(a_n-1)=a_{n+1}-a_n$，即 $a_{n+1}=2a_n$.

又 $a_2=2a_1$，所以数列 $\{a_n\}$ 是 1 为首项，2 为公比的等比数列， 所以 $a_n=2^{n-1}$-----------5 分

（2）（i）在 a_n 与 a_{n+1} 之间插入 n 个数，使这 $n+2$ 个数组成一个公差为 d_n 的等差数列，

a_n 为新数列的第 1 项，a_{n+1} 为新数列的第 $n+2$ 项，$\therefore a_{n+1}=a_n+(n+2-1)d_n$

即 $d_n=\dfrac{a_{n+1}-a_n}{n+1}=\dfrac{2^{n-1}}{n+1}$，即 $b_n=\dfrac{1}{d_n}=\dfrac{n+1}{2^{n-1}}=(n+1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ -----------------9 分

（ii） $T_n=2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^0+3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^1+4\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\cdots+n\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}+(n+1)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$------------------------①

$\dfrac{1}{2}T_n=2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^1+3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+4\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+\cdots+n\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+(n+1)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$-------------------------②

①—②得，$\dfrac{1}{2}T_n=2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}-(n+1)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

$$\frac{1}{2}T_n=2+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}}-(n+1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\frac{1}{2}T_n=2+1-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(n+1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=3-\left(n+3\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

所以$T_n=6-\left(n+3\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ----------------17 分

19.（17 分）解：（1）将伸缩变换φ_1:$\begin{cases}x'=\lambda_1 x\\ y'=u_1 y\end{cases}(\lambda_1>0,u_1>0)$代入$\frac{x^2}{2}+y^2=1$

得到$\frac{(\lambda_1 x)^2}{2}+(\mu_1 y)^2=1$, 则$4\lambda_1{}^2x^2+8\mu_1{}^2y^2=8$

$\therefore\begin{cases}4\lambda_1^2=1\\ 8\mu_1{}^2=1\end{cases}\therefore\begin{cases}\lambda_1=\frac{1}{2}\\ \mu_1=\frac{\sqrt{2}}{4}\end{cases}$，故所求的伸缩变换$\varphi_1$为$\begin{cases}x'=\frac{1}{2}x\\ y'=\frac{\sqrt{2}}{4}y\end{cases}$ ----------------5 分

（2）因为E_1经过平面直角坐标系的伸缩变换φ_2:$\begin{cases}x'=2x\\ y'=y\end{cases}$得到的曲线为$E_2:\frac{x^2}{16}-y^2=1$，

故可得E_1的方程为$\frac{(2x)^2}{16}-y^2=1$，即$\frac{x^2}{4}-y^2=1$

（i）E_1与x轴的两个交点A,B的坐标分别是$(-2,0),(2,0)$，因为直线l过点$(4,0)$，斜率为k，所以直线l的方程为$y=k(x-4)$，代入$x^2-4y^2=4$，

消去y并整理得$\left(4k^2-1\right)x^2-32k^2x+64k^2+4=0$，设$H(x_1,y_1),K(x_2,y_2)$，

则$\Delta=\left(-32k^2\right)^2-4\left(4k^2-1\right)\left(64k^2-4\right)\ 1-4k^2\neq0,=16\left(12k^2+1\right)>0,$

$x_1+x_2=\frac{32k^2}{4k^2-1}$，$x_1x_2=\frac{64k^2-4}{4k^2-1}$，

因为l与E_1在y轴的右侧有两个交点，所以$x_1+x_2=\frac{32k^2}{4k^2-1}>0$，且$x_1x_2=\frac{64k^2-4}{4k^2-1}>0$，

解得$k<-\frac{1}{2}$或$k>\frac{1}{2}$，

所以k的取值范围是$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$. ----------------10 分

（ii）证明:由①知$k<-\frac{1}{2}$或$k>\frac{1}{2}$，所以$k\neq 0$，

$$k_2k_3=\frac{y_1}{x_1-2}\cdot\frac{y_2}{x_2-2}=\frac{k^2\left(x_1-4\right)\left(x_2-4\right)}{x_1x_2-2\left(x_1+x_2\right)+4}=\frac{k^2x_1x_2-4k^2\left(x_1+x_2\right)+16k^2}{x_1x_2-2\left(x_1+x_2\right)+4}$$

$$=\frac{\frac{k^2\left(64k^2+4\right)}{4k^2-1}-\frac{4k^2\times 32k^2}{4k^2-1}+16k^2}{\frac{64k^2+4}{4k^2-1}-\frac{2\times 32k^2}{4k^2-1}+4}=\frac{-12k^2}{16k^2}=-\frac{3}{4},$$

$$k_1k_2=\frac{y_1}{x_1+2}\cdot\frac{y_1}{x_1-2}=\frac{y_1^2}{x_1^2-4}=\frac{\frac{x_1^2}{4}-1}{x_1^2-4}=\frac{1}{4},$$

所以，$k_2(k_1+k_3)=k_1k_2+k_2k_3=\frac{1}{4}+(-\frac{3}{4})=-\frac{1}{2}$为定值.-----------------17 分