郑州市 2024—2025 学年上期期末考试

高中一年级数学　评分参考

一、单选题

CBDC　ACCB

二、多选题

9.BD　10.ACD　11.ABD

三、填空题

12. $\frac{3}{2}$；　13. $[6,+\infty)$；　14. $[\frac{3}{2},9]$.

四、解答题

15.解：（1）当 $m=2$ 时，$A=\{x\mid -3\le x+2<6\}=[-5,4)$，....................................1 分

$B=\{x\mid \frac{1}{4}<2^x\le 32\}=(-2,5]$，....................................3 分

所以 $A\cup B=[-5,5]$，$A\cap(\complement_U B)=[-5,-2]$. ....6 分

（2）因为 p 是 q 的必要不充分条件，所以 $B\subsetneqq A$，....................................7 分

$A=\{x\mid -3\le x+m<6\}=[-3-m,6-m)$，$B=(-2,5]$ ....9 分

所以 $\begin{cases}6-m>5,\\ -3-m\le -2,\end{cases}$ ....11 分

解得 $-1\le m<1$，所以实数 m 的取值范围为 $[-1,1)$. ....13 分

16.解：（1）原式 $=3^{\frac{1}{2}}\cdot(\frac{3}{2})^{\frac{1}{3}}\cdot(4\times 3)^{\frac{1}{6}}+\lg\frac{1}{100}+4$

$=3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}\cdot 2^{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}-2+4=3-2+4=5.$ ....7 分

（2）$\dfrac{\sin(5\pi-\alpha)\sin(-\pi-\alpha)\sin(\frac{13\pi}{2}+\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)\cos(\frac{11\pi}{2}-\alpha)}=\dfrac{\sin\alpha\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{-\cos\alpha\cdot\cos\alpha\cdot(-\sin\alpha)}=\tan\alpha=2$，....11 分

所以 $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\dfrac{\tan^2\alpha+1+2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{4+1+4}{1-4}=-3.$

....................................15 分

17.（1）因为函数 $f(x)=\dfrac{2x+b}{x^2+a}$ 是定义在 $[-1，a+b]$ 上的奇函数，

所以 $a+b=1$ 且 $f(0)=\frac{b}{a}=0$，....................................2 分

所以 $a=1,b=0$，$f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$，

此时，$f(-x)=\dfrac{-2x}{x^2+1}=-f(x)$ 恒成立. ....4 分

（2）$f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上单调递增，证明如下：

任取 $-1\le x_1<x_2\le 1$，

$f(x_1)-f(x_2)=\frac{2x_1}{{x_1}^2+1}-\frac{2x_2}{{x_2}^2+1}=\frac{2x_1({x_2}^2+1)-2x_2({x_1}^2+1)}{({x_1}^2+1)({x_2}^2+1)}=\frac{2(x_1x_2-1)(x_2-x_1)}{({x_1}^2+1)({x_2}^2+1)}$ ，......7 分

因为 $-1\le x_1<x_2\le 1$，所以 $x_1x_2<1$， $x_2-x_1>0$， $f(x_1)-f(x_2)<0$， $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上单调递增. ....9 分

（3）因为 $f(x)$ 为奇函数，原不等式等价于 $f(1-2t^2)<-f(3t-2)=f(2-3t)$， ......10 分

又 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上单调递增，所以 $\begin{cases}-1\le 1-2t^2\le 1,\\ -1\le 3t-2\le 1,\\ 1-2t^2<2-3t,\end{cases}$ ....13 分

解得 $\begin{cases}-1\le t\le 1,\\ \frac{1}{3}\le t\le 1,\\ t<\frac{1}{2}\text{或}t>1,\end{cases}$ 综上 $t\in[\frac{1}{3},\frac{1}{2})$. ....15 分

18.(1)设 $H(t)=A\sin(\omega t+\varphi)+B\quad(\omega>0)$. ....1 分

由题意知 $\begin{cases}A+B=105\\ -A+B=15\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=45\\ B=60\end{cases}$. ....3 分

又 $T=\frac{2\pi}{\omega}=30\Rightarrow\omega=\frac{2\pi}{30}=\frac{\pi}{15}$，故 $H(t)=45\sin(\frac{\pi}{15}t+\varphi)+60$ ....4 分

$\because H(0)=15,\quad\therefore\sin\varphi=-1$

可取 $\varphi=-\frac{\pi}{2}$. ....5 分

$\therefore H(t)=45\sin(\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{2})+60=-45\cos\frac{\pi}{15}t+60$

故解析式为 $H(t)=-45\cos\frac{\pi}{15}t+60$，$t\in[0,30]$. ....6 分

令 $H(t)=37.5$，则 $-\cos\frac{\pi}{15}t=-\frac{1}{2}$，即 $\cos\frac{\pi}{15}t=\frac{1}{2}$，

$\because t\in[0,30],\quad\therefore\frac{\pi}{15}t\in[0,2\pi]$， ....8 分

$\therefore\frac{\pi}{15}t=\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{5\pi}{3}$，解得 $t=5$ 或 $t=25$. ....10 分

故游客甲坐上摩天轮后 5 分钟或 25 分钟时，距离地面的高度恰好为 37.5 米.

经过 $t(5\le t\le 30)$ 分钟后，甲距离地面的高度为 $H_1=-45\cos\frac{\pi}{15}t+60$，...............11 分

乙与甲间隔的时间为 $\frac{30}{60}\times 10=5$ 分钟， ....12 分

所以乙距离地面的高度$H_2=-45\cos\frac{\pi}{15}(t-5)+60, 5\le t\le 30$ ....13 分

则两人的高度差$h=|H_1-H_2|=|-45\cos\frac{\pi}{15}t+45\cos\frac{\pi}{15}(t-5)|$

$=45|\cos(\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{3})-\cos\frac{\pi}{15}t|=45|-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{15}t+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\pi}{15}t|=45|\sin(\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{6})|$ ，

$5\le t\le 30$ ....16 分

令$\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in Z)$，解得$t=10+15k, k\in Z$

又$5\le t\le 30$，所以当$t=10$或25分钟时，h 最大值为 45 米 ....17 分

19. 解：（1）若$f(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$， $f(\frac{1}{x})=\frac{1-(\frac{1}{x})^2}{1+(\frac{1}{x})^2}=\frac{x^2-1}{x^2+1}$，满足$f(x)+f(\frac{1}{x})=0$，

所以$f(x)$是“倒负函数”. ....3 分

$g(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$， $g(\frac{1}{x})=\ln\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\ln\frac{x-1}{x+1}, \ln\frac{x-1}{x+1}$无意义，所以$g(x)$不是“倒负函数”.6 分

（2） $f(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$， 任取$0<x_1<x_2$， $f(x_1)-f(x_2)=\frac{1-x_1^2}{1+x_1^2}-\frac{1-x_2^2}{1+x_2^2}=\frac{2(x_2^2-x_1^2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}>0$，

所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减, ...7 分

由（1）知， $f(x)+f(\frac{1}{x})=0$，所以$f(n^2)+f(\frac{1}{n^2})=0$，又$f(m^2)+f(\frac{1}{n^2})=0$，所以

$f(m^2)=f(n^2)$，所以$m^2=n^2$. ....8 分

$2m^2+\frac{1}{n^2}=2n^2+\frac{1}{n^2}\ge 2\sqrt{2}$，当且仅当$m^2=n^2=\frac{\sqrt{2}}{2}$时等号成立. ....10 分

（3）因为$f(x)=\ln x-\frac{2}{x-1}-1$， $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$，

任取$1<x_1<x_2$， $f(x_1)-f(x_2)=\ln x_1-\ln x_2-(\frac{2}{x_1-1}-\frac{2}{x_2-1})=\ln x_1-\ln x_2+\frac{2(x_1-x_2)}{(x_1-1)(x_2-1)}<0$，

所以$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，同理，$f(x)$在$(0,1)$上单调递增. ....11 分

又$f(e)=1-1-\frac{2}{e-1}=-\frac{2}{e-1}<0$， $f(e^2)=2-1-\frac{2}{e^2-1}=1-\frac{2}{e^2-1}>0$，由零点存在性定理知，

$\exists x_0\in(e,e^2), f(x_0)=0$，所以$f(x)$在$(1,+\infty)$上有且只有一个零点. ....13 分

又因为 $f(x)+f(\frac{1}{x})=\ln x-\frac{2}{x-1}-1+\ln\frac{1}{x}-\frac{2}{\frac{1}{x}-1}-1=\ln x-\ln x-\frac{2}{x-1}-\frac{2x}{1-x}-2=0$ ，.....15 分

所以 $f(x)$ 是 “倒负函数”，$f(x_0)+f(\frac{1}{x_0})=0$，所以 $f(\frac{1}{x_0})=-f(x_0)=0$，$\frac{1}{x_0}\in(0,1)$ 也是 $f(x)$ 的零点，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 各有一个零点，即 $f(x)$ 在定义域内有且只有两个零点.

..................17 分