郑州市 2023—2024 学年下期期末考试

高中二年级　数学评分参考

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	B	C	A	D	D	A	B

二、多选题：本题共 3 小题，每小题 6 分，18 分.

题号	9	10	11
答案	AD	CD	BC

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共计 15 分.

12. $2e$ ；　13. 72；　14. 0.0485 或 $\frac{97}{2000}$；$\frac{30}{97}$.

四、解答题：本题共 5 小题，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（13 分）

解：因为二项式 $\left(2x+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$ 的二项展开式中各二项式系数之和为 256，

即 $C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n=256$，可得 $n=8$.

（1）$\left(2x+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^8$ 的展开式的通项 $T_{k+1}=C_8^k(2x)^{8-k}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{k}}\right)^k=C_8^k2^{8-k}x^{\frac{24-4k}{3}}(k=0,1,2,\cdots 8)$，

令 $\frac{24-4k}{3}=4$ 得 $k=3$，$T_4=C_8^3\cdot 2^5\cdot x^4=1792x^4$，所以展开式中 x^4 项的系数是 1792.　----7 分

（2）由（1）可知，展开式中的第 1,4,7 项为有理项

且 $T_1=C_8^0\cdot 2^8\cdot x^8=256x^8$　　$T_4=C_8^3\cdot 2^5\cdot x^4=1792x^4$

$T_7=C_8^6\cdot 2^2\cdot x^0=112$　　----------------------.13 分

16.（15 分）

解:（1）由题知 $\bar{x}=\frac{1}{5}\times(1+3+5+7+9)=5$，$\bar{y}=\frac{1}{5}\times(25+37+48+58+72)=48$，

又 $\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2=40$，$\sum_{i=1}^{5}(y_i-\bar{y})^2=1326$，$\sum_{i=1}^{5}x_iy_i=1430$，

所以

,

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{5}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{5}\left(x_i-\overline{x}\right)^2\sum_{i=1}^{5}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}}=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-5\overline{x}\overline{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{5}\left(x_i-\overline{x}\right)^2\sum_{i=1}^{5}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}}=\frac{1430-5\times5\times48}{\sqrt{40\times1326}}\approx\frac{230}{230.3041}\approx0.999$$

由样本的相关系数非常接近 1，可以推断新能源汽车年销售量和充电桩数量这两个变量正线性相关，且相关程度很强，所以可以用线性回归模型拟合它们的关系．--------------------8 分

（2）$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sum_{i=1}^{5}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}=\frac{230}{40}=5.75$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=48-5.75\times5=19.25$，

所以 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=5.75x+19.25$．

当 $x=24$ 时，$\hat{y}=5.75\times24+19.25=157.25$，

故当充电桩数量为 24 万台时，该地区新能源汽车的年销量为 157.25 万辆．-----------15 分

17.（15 分）

解：$f'(x)=2ax-(a+4)+\frac{2}{x}$，定义域为$(0,+\infty)$

（1）当 $a=1$ 时，$f'(x)=2x-5+\frac{2}{x}=\frac{2x^2-5x+2}{x}=\frac{(2x-1)(x-2)}{x}$

当 $f'(x)>0$ 时，得 $0<x<\frac{1}{2}$ 或 $x>2$；当 $f'(x)<0$ 时，得 $\frac{1}{2}<x<2$

故函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 和 $(2,4)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{2},2\right)$ 上单调递减，

又 $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{9}{4}-2\ln2$，$f(4)=-4+4\ln2$，$f(4)>f\left(\frac{1}{2}\right)$

因此函数 $f(x)$ 在 $(0,4]$ 上的最大值为 $-4+4\ln2$．--6 分

（2）$f'(x)=2ax-(a+4)+\frac{2}{x}=\frac{2ax^2-(a+4)x+2}{x}=\frac{(ax-2)(2x-1)}{x}$

当 $0<a<4$ 时，$f'(x)>0$ 时，得 $0<x<\frac{1}{2}$ 或 $x>\frac{2}{a}$；$f'(x)<0$ 时，得 $\frac{1}{2}<x<\frac{2}{a}$

故函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 和 $\left(\frac{2}{a},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{2},\frac{2}{a}\right)$ 上单调递减；

当 $a=4$ 时，此时 $f'(x)=\frac{2(2x-1)^2}{x}\quad0$

故函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a>4$ 时，$f'(x)>0$ 时，得 $0<x<\frac{2}{a}$ 或 $x>\frac{1}{2}$；$f'(x)<0$ 时，得 $\frac{2}{a}<x<\frac{1}{2}$

故函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{2}{a}\right)$ 和 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{2}{a},\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减；

综上：当 $0<a<4$ 时，函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 和 $\left(\frac{2}{a},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{2},\frac{2}{a}\right)$ 上单调递减；

当 $a=4$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a>4$ 时，函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{2}{a}\right)$ 和 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{2}{a},\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减.-----------15 分

18. （17 分）

解：（1）记一道多选题“有 2 个选项正确”为事件 A_1，“有 3 个选项正确”为事件 A_2，“小明该题得 6 分”为事件 B，

则 $P(B)=P(BA_1)=P(A_1)\times P(B|A_1)=p\times\frac{1}{C_3^2}=\frac{1}{12}$，求得 $p=\frac{1}{4}$.-------------------------------6 分

（2）若小明选择方案①，则小强的得分为 3 分.

若小明选择方案②，记小强该题得分为 X，则 $X=0,3,6$，

且 $P(X=0)=P(A_1)\frac{C_2^1}{C_3^1}+P(A_2)\frac{C_1^1}{C_3^1}=\frac{5}{12}\times\frac{2}{3}+\frac{7}{12}\times\frac{1}{3}=\frac{17}{36}$,

$P(X=3)=P(A_2)\frac{C_2^1}{C_3^1}=\frac{7}{12}\times\frac{2}{3}=\frac{14}{36}=\frac{7}{18}$,

$P(X=6)=P(A_1)\frac{C_1^1}{C_3^1}=\frac{5}{12}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{36}$,

所以，$E(X)=0\times\frac{17}{36}+3\times\frac{14}{36}+6\times\frac{5}{36}=2$，

若小明选择方案③，记小强该题得分为 Y，则 $Y=0,6$，且

$P(Y=0)=P(A_1)\frac{C_3^2}{C_3^2}+P(A_2)\frac{C_1^1C_2^1}{C_3^2}=\frac{5}{12}+\frac{7}{12}\times\frac{2}{3}=\frac{29}{36}$,

$P(Y=6)=P(A_2)\frac{C_2^2}{C_3^2}=\frac{7}{12}\times\frac{1}{3}=\frac{7}{36}$,

所以，$E(Y)=0\times\frac{29}{36}+6\times\frac{7}{36}=\frac{7}{6}$,

因为 $E(Y)<E(X)<3$，所以小明应选择方案①.--15 分

19.（17 分）

解：（1） 因为 $f(x)=x^3+x^2+1$，则 $f'(x)=3x^2+2x$，

$k_1=f'(-1)=1, f(-1)=1$，曲线 $f(x)$ 在 $x_0=-1$ 处的切线为 $y-1=x+1\Rightarrow x_1=-2$，且

$|x_1-x_0|\geqslant 0.5$，

$k_2=f'(-2)=8, f(-2)=-3$，曲线 $f(x)$ 在 $x_1=-2$ 处的切线 $y+3=8(x+2)\Rightarrow x_2=-\frac{13}{8}\approx-1.63$，

且 $|x_2-x_1|<0.5$，故用牛顿法求方程 $f(x)=0$ 满足精度 $\varepsilon=0.5$ 的近似解为 -1.63.--------------5 分

（2）（ⅰ）设 $P_{n-1}\left(x_{n-1},0\right)$，则 $Q_{n-1}\left(x_{n-1},g\left(x_{n-1}\right)\right)$，因为 $g\left(x\right)=2^{x}$，所以 $g'\left(x\right)=2^{x}\ln 2$，

则 $Q_{n-1}\left(x_{n-1},g\left(x_{n-1}\right)\right)$ 处切线为 $y=2^{x_{n-1}}\ln 2\cdot\left(x-x_{n-1}\right)+2^{x_{n-1}}$，

切线与 x 轴相交得 $P_{n}\left(x_{n},0\right)$，

$x_{n}-x_{n-1}=-\dfrac{1}{\ln 2}$，即 $\left|x_{n}-x_{n-1}\right|=\dfrac{1}{\ln 2}$ 为定值.根据牛顿法，此函数没有零点.----------------11 分

（ⅱ）因为 $x_{0}=0$ 得 $x_{n-1}=-\dfrac{n-1}{\ln 2}$，

所以 $\left|P_{0}P_{1}\right|=\left|P_{1}P_{2}\right|=\cdots=\left|P_{n-1}P_{n}\right|=\dfrac{1}{\ln 2}$，$g\left(x_{n-1}\right)=2^{-\frac{n-1}{\ln 2}}=\left(2^{-\log_{2}e}\right)^{n-1}=\dfrac{1}{e^{n-1}}$，

所以 $S_{\triangle P_{0}Q_{0}P_{1}}+S_{\triangle P_{1}Q_{1}P_{2}}+\cdots+S_{\triangle P_{n-1}Q_{n-1}P_{n}}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\ln 2}\left(1+\dfrac{1}{e}+\dfrac{1}{e^{2}}+\dfrac{1}{e^{3}}+\cdots+\dfrac{1}{e^{n-1}}\right)$，

$=\dfrac{1}{2\ln 2}\left(1+\dfrac{1}{e}+\dfrac{1}{e^{2}}+\dfrac{1}{e^{3}}+\cdots+\dfrac{1}{e^{n-1}}\right)=\dfrac{1}{2\ln 2}\cdot\dfrac{1-\dfrac{1}{e^{n}}}{1-\dfrac{1}{e}}$，

$=\dfrac{1}{2\ln 2}\cdot\dfrac{e^{n}-1}{e^{n}-e^{n-1}}=\dfrac{e^{n}-1}{e^{n}-e^{n-1}}\log_{4}e$.

故所得前 n 个三角形，$\triangle P_{0}Q_{0}P_{1}$，$\triangle P_{1}Q_{1}P_{2}$，……，$\triangle P_{n-1}Q_{n-1}P_{n}$ 的

面积和为 $\dfrac{e^{n}-1}{e^{n}-e^{n-1}}\log_{4}e$.--17 分