郑州市 2023—2024 学年下期期末考试

高中一年级　数学评分参考

第Ⅰ卷（选择题,共 58 分）

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	D	B	A	D	C	A	A

二、多选题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分，在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

题号	9	10	11
答案	ABC	BD	ABD

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共计 15 分.

12. $\frac{\sqrt{85}}{5}$；13. $\sqrt{3}$；14. $[\frac{11}{4},9]$.

四、解答题：本题共 5 小题，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本小题 13 分）

解:（1）$\because \vec{a}//\vec{b},\therefore \vec{a}=\lambda\vec{b}=(-\lambda,2\lambda)$,

$\because |\vec{a}|=4,\therefore \lambda^2+4\lambda^2=16,\ \lambda=\pm\frac{4\sqrt{5}}{5}$,

$\vec{a}=(-\frac{4\sqrt{5}}{5},\frac{8\sqrt{5}}{5})$或$\vec{a}=(\frac{4\sqrt{5}}{5},-\frac{8\sqrt{5}}{5})$ ………6 分

(2) $\because (\vec{a}-\vec{b})\perp\vec{b}$,

$(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{b}=0$, 即 $\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}^2=0$, $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta=5$,

$\cos\theta=\frac{5}{4\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{4}$.

………13 分

16.（本小题 15 分）

解:（1）在三棱锥 $A-BCD$ 中，因为 O 为 BD 的中点，

且 $AB=AD$，则 $OA\perp BD$，又平面 $ABD\perp$ 平面 BCD，

平面 $ABD\bigcap$ 平面 $BCD=BD$，$OA\subset$ 平面 ABD，

所以 $OA\perp$ 平面 BCD. ....7 分

（2） 由题意可得三棱锥 $A-BCD$ 与三棱锥 $E-BCD$ 底面积相同，高之比等于 $\dfrac{3}{2}$，

所以体积之比也为 $\dfrac{3}{2}$，$\therefore V_{A-BCD}=\dfrac{3}{2}V_{E-BCD}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

因 $OA\perp$ 平面 BCD，所以 OA 为三棱锥 $A-BCD$ 的高，

由因为 ΔOCD 是边长为 1 的等边三角形，所以 $S_{\triangle OCD}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，则 $S_{\Delta BCD}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $V_{A-BCD}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot OA=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，$\therefore OA=1$，

作 $OM\perp CD$，连 AM，则 $\angle AMO$ 即为平面 ACD 与面 BCD 所成二面角的平面角.

$\because OA=1$，$OM=\dfrac{\sqrt{3}}{2},OA\perp OM,\therefore AM=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

$\therefore \cos\angle AMO=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$ ....15 分

17.（本小题 15 分）

解: (1) 因为 $b\sin B-c\sin C+(c-a)\sin A=0.$，

所以由正弦定理得 $b^2-c^2+(c-a)a=0$，

整理得 $a^2+c^2-b^2=ac$，

由余弦定理得 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{1}{2}$，

因为 $0<B<\pi$，所以 $B=\dfrac{\pi}{3}$； ....7 分

(2) 由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B$，

由 (1) 知 $\cos B=\dfrac{1}{2}$，且 $b=2$，

所以 $2^2=a^2+c^2-ac\quad 2ac-ac=ac$，

当且仅当 $a=c$ 时等号成立，即 $ac\quad 4$，

所以 $S=\dfrac{1}{2}\cdot ac\cdot\sin B\quad \dfrac{1}{2}\times 4\times\sin\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，

即当ΔABC为正三角形时，ΔABC面积最大值为$\sqrt{3}$；　　.........15分

18.（本小题17分）

解：(1)设第80百分位数为a，

因为$0.01\times5+0.07\times5+0.06\times5=0.7<0.8$，

$0.01\times5+0.07\times5+0.06\times5+0.04\times5=0.9>0.8$，

故a位于第四组：$[35,40)$内，所以$0.7+(a-35)\times0.04=0.8$，

解得$a=37.5.$　　.........7分

(2)设第四组的宣传使者的年龄平均数$\bar{x}=36$，方差$s_1^2=\frac{5}{2}$，第五组的宣传使者的年龄平均数$\bar{y}=42$，方差$s_2^2=1$，

设第四组和第五组所有宣传大使的年龄平均数为$\bar{z}$，方差为s^2，

则$\bar{z}=\dfrac{\sum_{i=1}^{4}x_i+\sum_{i=1}^{2}y_i}{6}=\dfrac{4\bar{x}+2\bar{y}}{6}=\dfrac{4\times36+2\times42}{6}=38,$

即第四组和第五组所有宣传使者的年龄平均数为38岁，

则$s^2=\frac{1}{6}(4s_1^2+4\times4+2s_2^2+2\times16)=\frac{1}{6}(10+16+2+32)=10$，

即第四组和第五组所有宣传使者的年龄方差为10，

据此估计这m人中年龄在$35\sim45$岁的所有人的年龄平均数为38，方差约为10...17分

19.（本小题17分）

解：（1）$P'=\begin{cases}x'=1\times3+1\times1=4\\y'=-1\times3+1\times1=-2\end{cases}$，$P'=(4,-2)$.........4分

（2）设$OP=OP'=r$，$\angle POx=\theta$，则$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$\angle P'Ox=\theta+\alpha$，

故$x'=r\cos\left(\theta+\alpha\right)=r\cos\theta\cos\alpha-r\sin\theta\sin\alpha=x\cos\alpha-y\sin\alpha$

$y'=r\sin\left(\theta+\alpha\right)=r\sin\theta\cos\alpha+r\cos\theta\sin\alpha=x\sin\alpha+y\cos\alpha$

所以坐标变换公式为$\begin{cases}x'=x\cos\alpha-y\sin\alpha\\y'=x\sin\alpha+y\cos\alpha\end{cases}$，

该变换所对应的二阶矩阵为$\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$.........10分

（3）设矩阵$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，向量$\vec{m}=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$，$\vec{n}=\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$，则$\vec{m}+\vec{n}=\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix}$.

$A\left(\vec{m}+\vec{n}\right)=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a\left(x_1+x_2\right)+b\left(y_1+y_2\right) \\ c\left(x_1+x_2\right)+d\left(y_1+y_2\right) \end{pmatrix}$，

对应变换公式为：$\begin{cases} x'=a\left(x_1+x_2\right)+b\left(y_1+y_2\right) \\ y'=c\left(x_1+x_2\right)+d\left(y_1+y_2\right) \end{cases}$，

$A\vec{m}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax_1+by_1 \\ cx_1+dy_1 \end{pmatrix}$，$A\vec{n}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax_2+by_2 \\ cx_2+dy_2 \end{pmatrix}$

所以$A\vec{m}+A\vec{n}==\begin{pmatrix} ax_1+by_1 \\ cx_1+dy_1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} ax_2+by_2 \\ cx_2+dy_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a\left(x_1+x_2\right)+b\left(y_1+y_2\right) \\ c\left(x_1+x_2\right)+d\left(y_1+y_2\right) \end{pmatrix}$

故对应变换公式同样为$\begin{cases} x'=a\left(x_1+x_2\right)+b\left(y_1+y_2\right) \\ y'=c\left(x_1+x_2\right)+d\left(y_1+y_2\right) \end{cases}$

所以$A\left(\vec{m}+\vec{n}\right)=A\vec{m}+A\vec{n}$得证……….17 分