2024年郑州市高中毕业年级第三次质量预测

数学　评分参考

一、单选题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	D	A	B	D	C	A	C

二、多选题

题号	9	10	11
答案	BC	ACD	ACD

三、填空题

12．$\frac{1}{2}$；　　13．$2\sqrt{6}$；　　14．$\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^{n+1}$.

四、解答题

15．（13分）

（1）由已知可得，$\overline{x}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=3$，

$$\overline{y}=\frac{6.4+5.5+5.0+4.8+3.8}{5}=5.1,$$ ………………2分

由题可列下表：

$x_i-\overline{x}$	−2	−1	0	1	2
$y_i-\overline{y}$	1.3	0.4	−0.1	−0.3	−1.3

$$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=-5.9,\quad \sqrt{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2}=\sqrt{10},\quad \sqrt{\sum_{i=1}^{5}(y_i-\overline{y})^2}=\sqrt{3.64}.$$

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(y_i-\overline{y})^2}}=\frac{-5.9}{\sqrt{36.4}}\approx\frac{-5.9}{6}\approx-0.98.$$ ……………………5分

（2）由（1）知，y与x的相关系数$r\approx-0.98$，$|r|$接近1，所以y与x之间具有极强的线性相关关系，可用线性回归模型进行描述.　………………8分

（3） 由（1）知，$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2}=\dfrac{-5.9}{10}=-0.59$， ………………9 分

$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=5.1-(-0.59)\cdot 3=6.87$. ………………10 分

所求经验回归方程为 $\hat{y}=-0.59x+6.87.$ ………………11 分

（3）令 $x=8,\hat{y}=2.15$，预测 2024 年的酸雨区面积占国土面积的百分比为 2.15%. …13 分

16.（15 分）

解（1）若 $a=2,$ 则 $f(x)=e^{2x}-x,f'(x)=2e^{2x}-1.$ ………………1 分

又 $f(1)=e^2-1.$

故所求切线方程为 $y-(e^2-1)=(2e^2-1)(x-1)$

即 $y=(2e^2-1)x-e^2.$ ………………4 分

（2）由题 $f'(x)=ae^{ax}-1.$ ………………5 分

1° 当 $a\le 0$ 时，$f'(x)<0,$ $f(x)$ 在 R 上单调递减，又 $f(0)=1>0,f(1)=e^a-1\le 0$.

$f(x)$ 存在一个零点，此时 $f(x)$ 零点个数为 1. ………………7 分

2° 当 $a>0$ 时，令 $f'(x)<0$ 得 $x<-\dfrac{\ln a}{a}$，令 $f'(x)>0$ 得 $x>-\dfrac{\ln a}{a}$,

则 $f(x)$ 在（$-\infty,-\dfrac{\ln a}{a}$）上单减，在（$-\dfrac{\ln a}{a},+\infty$）上单增.

$f(x)$ 的最小值为 $f(-\dfrac{\ln a}{a})=\dfrac{1+\ln a}{a}$. ………………9 分

I）当 $a=\dfrac{1}{e}$ 时，$f(x)$ 的最小值为 0，此时 $f(x)$ 有一个零点. ………………11 分

Ii）当 $a>\dfrac{1}{e}$ 时，$f(x)$ 的最小值大于 0，此时 $f(x)$ 没有零点. ………………13 分

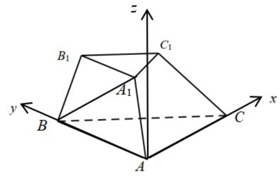
Iii）当 $0<a<\dfrac{1}{e}$ 时，$f(x)$ 的最小值小于 0，$f(-1)=e^{-a}+1>0,$

$f(-\dfrac{\ln a}{a})=\dfrac{1+\ln a}{a}<0,x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$.此时 $f(x)$ 有两个零点.

综上，当 $a\le 0$ 或 $a=\dfrac{1}{e}$ 时，$f(x)$ 有一个零点；当 $0<a<\dfrac{1}{e}$ 时，$f(x)$ 有两个零点；

当 $a>\dfrac{1}{e}$ 时，$f(x)$ 没有零点. ………………15 分

17．（15 分）（1）证明：如图，在等腰梯形 ABB_1A_1 中，连接 BA_1，



又∵$AA_1=A_1B_1=BB_1=\frac{1}{2}AB=1$，可以解得 $BA_1=\sqrt{3}$，

在三角形 BAA_1 中，$AA_1^2+BA_1^2=AB^2$，　∴$BA_1\perp AA_1$，　……………2 分

又∵ 平面$ABB_1A_1\perp$平面ABC，且平面$ABB_1A_1\cap$平面$ABC=AB$，

$AC\perp AB$，且 $AB\subset$平面ACC_1A_1，

∴$AC\perp$平面 ABB_1A_1，∴$BA_1\perp AC$.　………………4 分

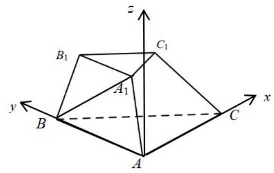
又∵ $AA_1\cap AC=A$，且 $AC,AA_1\subset$平面ACC_1A_1，

∴$BA_1\perp$平面 ACC_1A_1.　………………5 分

(2) 由(1)可知，$V_{A_1-ABC}=V_{C-ABA_1}$，

∴$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}\times AC=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$AC=3$.　………………7 分

∴以 A 为原点，以 AC，AB 为 x，y 轴，建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$.



可得：B（0，2，0），C（3，0，0），$A_1(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，$B_1(0,\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$.

易知平面 ACC₁A₁ 的一个法向量为$\overrightarrow{BA_1}=(0,-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，………………9 分

设平面 BCC_1B_1 的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，又∵ $\overrightarrow{BB_1}=(0,-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}),\overrightarrow{BC}=(3,-2,0)$，

由$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BB_1}=-\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}z=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=3x-2y=0,\end{cases}$

令 $z=\sqrt{3}$，解得平面 BCC_1B_1 的一个法向量为$\vec{n}=(2,3,\sqrt{3})$，　………………12 分

∴ $\cos<\overrightarrow{BA_1},\vec{n}>=-\frac{\sqrt{3}}{4}$.　………………14 分

∴平面 ACC_1A_1 与平面 BCC_1B_1 的夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{4}$.　………………15 分

18．（17 分）

解：（1）由题意得 $e^2=1-\frac{b^2}{a^2}=\frac{3}{4}$，将 $P(-2,\sqrt{3})$ 代入椭圆方程得 $\frac{4}{a^2}+\frac{3}{b^2}=1$，联立方程组，

解得$\begin{cases}a^2=16\\ b^2=4\end{cases}$，∴椭圆的方程为$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$.　………………………………4 分

（2）直线 AP 与椭圆 C 相切.　……………5 分

理由如下：

设 A（x，0），由 $AA_2:AA_1=HA_2:HA_1$，得 $\frac{|x-4|}{|x+4|}=\frac{6}{2}$，解得 $x=-8$，此时 $A(-8,0)$，…6 分

直线 AP 的方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{6}(x+8)$，…………7 分

联立直线 AP 与椭圆 $C\begin{cases}y=\frac{\sqrt{3}}{6}(x+8),\\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1,\end{cases}$ 消 y 得,$x^2+4x+4=0$，解得 $x=-2$.

∴直线 AP 与椭圆 C 相切.…………10 分

（3）设 $T(-8,t)$，

由 $T(-8,t),M(x_1,y_1),A_1(-4,0)$ 三点共线，得 $\frac{y_1}{x_1+4}=-\frac{t}{4}$,

由 $T(-8,t),N(x_2,y_2),A_2(4,0)$ 三点共线，得 $\frac{y_2}{x_2-4}=-\frac{t}{12}$,

得 $\frac{y_1(x_2-4)}{y_2(x_1+4)}=3$, 又∵ $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$，得 $\frac{{y_1}^2}{{x_1}^2-16}=-\frac{1}{4},\frac{{y_1}^2}{(x_1-4)(x_1+4)}=-\frac{1}{4}$,

得 $\frac{(x_1-4)(x_2-4)}{y_1y_2}=-12$,

即$x_1x_2-4(x_1+x_2)+12y_1y_2+16=0$. ①

设直线 MN 的方程为 $x=my+n$，

即$(m^2+12)y_1y_2+(mn-4m)(y_1+y_2)+n^2-8n+16=0$.…………12 分

联立直线 MN 与椭圆 $C\begin{cases}x=my+n,\\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1,\end{cases}$ 消 x 得 $(m^2+4)y^2+2mny+n^2-16=0$，

则有$\begin{cases}y_1+y_2=-\frac{2mn}{m^2+4},\\ y_1y_2=\frac{n^2-16}{m^2+4},\end{cases}$ ② …………14 分

将②式代入①式，得 $n^2-2n-8=0$,解得 $n=4$(舍)或$n=-2$.

∴直线 MN 经过定点（-2,0）. …………17 分

19.（17 分）

（1）由题可设所求点的坐标为(x,y)，由$\begin{cases} x=-\cos\dfrac{\pi}{4}+\sqrt{3}\sin\dfrac{\pi}{4}, \\ y=-\sin\dfrac{\pi}{4}-\sqrt{3}\cos\dfrac{\pi}{4}, \end{cases}$ …………2 分

得所求点的坐标为$(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2})$. …………………………4 分

（2）设曲线$xy=1$上任意一点(x,y)在旋转角是$\dfrac{\pi}{4}$的旋转变换下所得点坐标为(x',y'). ………6 分

则$\begin{cases} x'=x\cos\dfrac{\pi}{4}-y\sin\dfrac{\pi}{4}, \\ y'=x\sin\dfrac{\pi}{4}+y\cos\dfrac{\pi}{4}, \end{cases}$ 即$\begin{cases} x'=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x-y), \\ y'=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x+y), \end{cases}$ ……………………8 分

得$(y')^2-(x')^2=2xy=2$，

所求曲线方程为$\dfrac{y^2}{2}-\dfrac{x^2}{2}=1$. ……………………10 分

（3）由题点$B(-1,-1)$在旋转角是$\dfrac{\pi}{4}$的旋转变换下所得的点为$B'(0,-\sqrt{2})$.

设A,C在旋转角是$\dfrac{\pi}{4}$的旋转变换下所得的点分别为A'和C'.

设曲线$xy=1$在旋转角是$\dfrac{\pi}{4}$的旋转变换下所得曲线为M',则M'方程为$\dfrac{y^2}{2}-\dfrac{x^2}{2}=1$.

则B'是曲线M'的下顶点.

由题，$\Delta A'B'C'$为等边三角形，$\Delta A'B'C'$的面积即为ΔABC的面积. ……………12 分

设ΔABC的边长为$t(t>0)$，由双曲线的对称性：

当A'和C'同在曲线M'的下支时，则$A'(-\dfrac{t}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}t-\sqrt{2})$，

代入M'的方程得t无解. ……………………14 分

当A'和C'同在曲线M'的上支时，则$A'(-\dfrac{t}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}t-\sqrt{2})$，

代入M'的方程得$t=2\sqrt{6}$. ΔABC的面积为$6\sqrt{3}$.

综上所述，ΔABC的面积为$6\sqrt{3}$. ……………………17 分