郑州市 2024 年高中毕业年级第二次质量预测

数学参考答案

一、单选题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	D	C	B	D	C	C	A

二、多选题

题号	9	10	11
答案	**AD**	**ABD**	**ACD**

三、填空题

12. $-\frac{1}{4}$；13. $\sqrt{10}$，$\frac{4\sqrt{5}}{5}$；14. $2-2\ln 2$.

四、解答题

15. 解：(1) 前 3 局比赛甲都获胜，

故前 3 局甲都不下场的概率为 $P=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$. ....4 分

(2) X 的所有可能取值为 0，1，2，3. ....5 分

其中，$X=0$ 表示第 1 局乙输，第 3 局是乙上场，且乙输，则 $P(X=0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$；

............................6 分

$X=1$ 表示第 1 局乙输，第 3 局是乙上场，且乙赢；或第 1 局乙赢，且第 2 局乙输，

则 $P(X=1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$； .... 8 分

$X=2$ 表示第 1 局乙赢，且第 2 局乙赢，第 3 局乙输，

则 $P(X=2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$； ....9 分

$X=3$ 表示第 1 局乙赢，且第 2 局乙赢，第 3 局乙赢，

则 $P(X=3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$； ....10 分

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

............................11 分

故 X 的数学期望为 $E(X)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{9}{8}$.　　　　　　..........................13 分

16．解：(1) 函数定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{2ax^2+(1-2a^2)x-a}{x}$，　. . . . . 2 分

因为 $x=1$ 是函数 $y=f(x)$ 的极值点，

所以 $f'(1)=1+a-2a^2=0$，解得 $a=-\frac{1}{2}$ 或 $a=1$，

因为 $a \geq 0$，所以 $a=1$.　　　　　　..........................5 分

此时 $f'(x)=\dfrac{2x^2-x-1}{x}=\dfrac{(2x+1)(x-1)}{x}$，

令 $f'(x)>0$ 得 $x>1$，令 $f'(x)<0$ 得 $0<x<1$，

$\therefore$ $f(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，在 $(1,+\infty)$ 单调递增，所以 $x=1$ 是函数的极小值点.

所以 $a=1$.　　　　　　..........................7 分

(2) 当 $a=0$ 时，$f(x)=x$，则函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $(0,+\infty)$;　　..........................8 分

当 $a>0$ 时，$f'(x)=\dfrac{2ax^2+(1-2a^2)x-a}{x}=\dfrac{(2ax+1)(x-a)}{x}$，　　..........................9 分

因为 $a>0$，$x>0$，则 $2ax+1>0$，

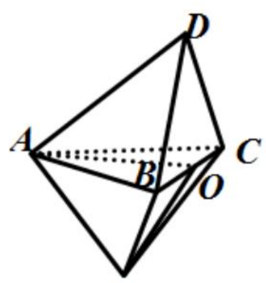
令 $f'(x)>0$ 得 $x>a$；令 $f'(x)<0$ 得 $0<x<a$；

$\therefore$ 函数的单调减区间为 $(0,a)$，单调增区间为 $(a,+\infty)$.　　..........................13 分

综上可知：当 $a=0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，无递减区间；

当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减，在 $(a,+\infty)$ 上单调递增.　..............15 分

17．证明：取 BC 中点 O，连接 AO，EO.



$\because$ ΔABC 是等边三角形，O 为 BC 中点，

$\therefore$ $AO\perp BC$，　　　　........................2 分

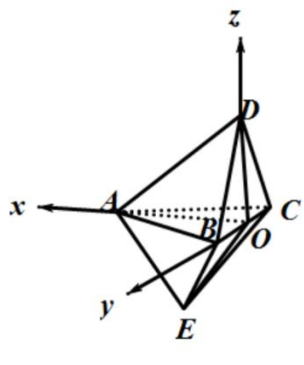
又 $EB=EC$，$\therefore$ $EO\perp BC$，　　........................3 分

$\because$ $AO\cap EO=O$，$\therefore$ $BC\perp$ 平面 AEO，

又 $AE\subset$ 平面 AEO，

$\therefore$ $BC\perp AE$.　　　　........................6 分

(2)连接 DO，则 $DO\perp BC$，



由 $AB=AC=BC=2$，$DB=DC=EB=EC=\sqrt{2}$ 得 $AO=\sqrt{3}$，$DO=1$，

又 $AD=2$，$\therefore AO^2+DO^2=AD^2$，

$\therefore DO\perp AO$，……………………8 分

又 $AO\cap BC=O$，$\therefore DO\perp$ 平面ABC．……………………9 分

如图，以 O 为坐标原点，OA，OB，OD 所在直线分别为 x,y,z 轴，建立空间直角坐标系 $O-xyz$，

则 $O(0,0,0)$，$A(\sqrt{3},0,0)$，$C(0,-1,0)$，$D(0,0,1)$，

$\therefore \overrightarrow{CA}=(\sqrt{3},1,0)$，$\overrightarrow{CD}=(0,1,1)$，……………………10 分

设平面 ACD 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CA}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\sqrt{3}x+y=0,\\ y+z=0,\end{cases}$

取 $x=1$，则 $\vec{n}=(1,-\sqrt{3},\sqrt{3})$．……………………11 分

$\because \angle AOE$ 是二面角 $A-BC-E$ 的平面角，$\therefore \angle AOE=30^\circ$，……………………12 分

又 $OE=1$，$\therefore E(\frac{\sqrt{3}}{2},0,-\frac{1}{2})$，$\overrightarrow{DE}=(\frac{\sqrt{3}}{2},0,-\frac{3}{2})$，……………………13 分

则 $\cos<\overrightarrow{DE},\vec{n}>=\dfrac{\overrightarrow{DE}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{DE}||\vec{n}|}=-\dfrac{\sqrt{7}}{7}$，……………………14 分

$\therefore$ 直线 DE 与平面 ACD 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$．……………………15 分

18.解：（1）依题意有 $b=1,c=\sqrt{3}$，解得 $a^2=b^2+c^2=4$，

所以椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$．……………………4 分

（2）设 $l_{AB}:x=my+1(m\neq0)$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $l_{CD}:x=-\dfrac{1}{m}y+1(m\neq0)$，

联立 $\begin{cases}x=my+1\\ x^2+4y^2=4\end{cases}$，故 $(m^2+4)y^2+2my-3=0$，

$\Delta=16m^2+48>0$，$y_1+y_2=\dfrac{-2m}{m^2+4}$，……………………6 分

故 $M(\dfrac{4}{m^2+4},\dfrac{-m}{m^2+4})$，……………………7 分

由 $-\dfrac{1}{m}$ 代替 m，得 $N(\dfrac{4m^2}{1+4m^2},\dfrac{m}{1+4m^2})$，……………………8 分

当 $\dfrac{4}{m^2+4}=\dfrac{4m^2}{1+4m^2}$，即 $m^2=1$ 时，$l_{MN}:x=\dfrac{4}{5}$，过点 $K(\dfrac{4}{5},0)$．

当$\dfrac{4}{m^2+4}\neq\dfrac{4m^2}{1+4m^2}$，即$m^2\neq 1$时，

$K_{MN}=\dfrac{5m}{4(m^2-1)}$，$l_{MN}:y+\dfrac{m}{m^2+4}=\dfrac{5m}{4(m^2-1)}(x-\dfrac{4}{m^2+4})(m^2\neq 1,m\neq 0)$,

令$y=0,x=\dfrac{4(m^2-1)}{5(m^2+4)}+\dfrac{4}{(m^2+4)}=\dfrac{4m^2+16}{5(m^2+4)}=\dfrac{4}{5}$，

∴直线MN恒过点$K(\dfrac{4}{5},0)$.

当$m=0$，经验证直线MN过点$K(\dfrac{4}{5},0)$.

综上，直线MN恒过点$K(\dfrac{4}{5},0)$. ....12 分

(3) $S_{\Delta MNS}=S_{\Delta MKS}+S_{\Delta NKS}=\dfrac{1}{2}\cdot|KS|\cdot|y_M-y_N|$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{5}\cdot|\dfrac{m}{1+4m^2}+\dfrac{m}{m^2+4}|=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{|m^3+m|}{4m^4+17m^2+4}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{|m+\frac{1}{m}|}{4m^2+\frac{4}{m^2}+17}$,

.... 14 分

令$t=|m+\dfrac{1}{m}|\in[2,+\infty)$，$S_{\Delta MNS}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{|m+\frac{1}{m}|}{4m^2+\frac{4}{m^2}+17}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{t}{4t^2+9}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{4t+\frac{9}{t}}$，

∵$S_{\Delta MNS}$在$t\in[2,+\infty)$上单调递减，∴$S_{\Delta MNS}\leq\dfrac{1}{25}$， .... 16 分

当且仅当$t=2,m=\pm 1$,时取等号.

故$\triangle MNS$面积的最大值为$\dfrac{1}{25}$. ....17 分

19. 解：（1）由题意得$a_1+a_2+\cdots+a_n=4$，则$1+1+2=4$或$1+3=4$，

故所有 4 的 1 增数列有数列$1,2,1$和数列 1，3. ....3 分

（2）当$n=5$时，因为存在m的 6 增数列，

所以数列$\{a_n\}$的各项中必有不同的项，所以$m\geq 6$且$m\in N^*$.

若$m=6$，满足要求的数列$\{a_n\}$中有四项为 1，一项为 2，

所以$k\leq 4$，不符合题意，所以$m>6$.

若$m=7$，满足要求的数列$\{a_n\}$中有三项为 1，两项为 2，符合 m 的 6 增数列.

所以，当$n=5$时，若存在 m 的 6 增数列，m 的最小值为 7. ....8 分

（3）若数列$\{a_n\}$中的每一项都相等，则$k=0$，

若$k\neq 0$，所以数列$\{a_n\}$中存在大于 1 的项，

若首项$a_1\neq 1$，将a_1拆分成a_1个 1 后k变大，

所以此时k不是最大值，所以$a_1=1$.

当$i=2,3,...,n$时，若$a_i>a_{i+1}$，交换a_i,a_{i+1}的顺序后k变为$k+1$，

所以此时k不是最大值，所以$a_i\leq a_{i+1}$.

若$a_{i+1}-a_i\notin\{0,1\}$，所以$a_{i+1}\geq a_i+2$，

所以将a_{i+1}改为$a_{i+1}-1$，并在数列首位前添加一项 1，所以k的值变大，

所以此时k不是最大值，所以$a_{i+1}-a_i\in\{0,1\}$.

若数列$\{a_n\}$中存在相邻的两项$a_i=2,a_{i+1}\geq 3$，设此时$\{a_n\}$中有x项为 2，

将a_{i+1}改为 2，并在数列首位前添加$a_{i+1}-2$个 1 后，k的值至少变为$k+1$，

所以此时k不是最大值，

所以数列$\{a_n\}$的各项只能为 1 或 2，所以数列$\{a_n\}$为$1,1,...,1,2,2,\cdots,2$的形式.

设其中有x项为 1，有y项为 2，

因为存在 100 的k增数列，所以$x+2y=100$，

所以$k=xy=\left(100-2y\right)y=-2y^2+100y=-2(y-25)^2+1250$，

所以，当且仅当$x=50,y=25$时，k取最大值为 1250.　　　　　　.........................17 分