郑州市 2024 高三第二次质量预测数学（参考答案）

一、单选题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	D	C	B	D	C	C	A

二、多选题

题号	9	10	11
答案	AD	ABD	ACD

三、填空题

12. $-\frac{1}{4}$

13. $\sqrt{10}$，$\frac{4\sqrt{5}}{5}$

14. $2-2\ln 2$

四、解答题

15.解：(1) 前 3 局比赛甲都不下场说明前 3 局甲都获胜，

故前 3 局甲都不下场的概率为 $P=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$. ....4 分

(2)X 的所有可能取值为 0，1，2，3. ....5 分

其中，$X=0$ 表示第 1 局乙输，第 3 局是乙上场，且乙输，则 $P(X=0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$；

............................6 分

$X=1$ 表示第 1 局乙输，第 3 局是乙上场，且乙赢；或第 1 局乙赢，且第 2 局乙输，

则 $P(X=1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$； .... 8 分

$X=2$ 表示第 1 局乙赢，且第 2 局乙赢，第 3 局乙输，

则 $P(X=2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$； ....9 分

$X=3$ 表示第 1 局乙赢，且第 2 局乙赢，第 3 局乙赢，

则 $P(X=3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$； ....10 分

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

............................11 分

故 X 的数学期望为 $E(X)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{9}{8}$.　　............................13 分

16．解：(1) 函数定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{2ax^2+(1-2a^2)x-a}{x}$，　　............................2 分

因为 $x=1$ 是函数 $y=f(x)$ 的极值点，

所以 $f'(1)=1+a-2a^2=0$，解得 $a=-\frac{1}{2}$ 或 $a=1$，

因为 $a\geqslant 0$，所以 $a=1$.　　............................5 分

此时 $f'(x)=\frac{2x^2-x-1}{x}=\frac{(2x+1)(x-1)}{x}$

令 $f'(x)>0$ 得 $x>1$，令 $f'(x)<0$ 得 $0<x<1$，

∴ $f(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，在 $(1,+\infty)$ 单调递增，所以 $x=1$ 是函数的极小值点.

所以 $a=1$.　　............................7 分

(2) 当 $a=0$ 时，$f(x)=x$，则函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $(0,+\infty)$;　　............................8 分

当 $a>0$ 时，$f'(x)=\frac{2ax^2+(1-2a^2)x-a}{x}=\frac{(2ax+1)(x-a)}{x}$，　　............................9 分

因为 $a>0$，$x>0$，则 $2ax+1>0$，

令 $f'(x)>0$ 得 $x>a$；令 $f'(x)<0$ 得 $0<x<a$；

$\therefore$ 函数的单调减区间为 $(0,a)$, 单调增区间为 $(a,+\infty)$.　　............................13 分

综上可知：当 $a=0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，无递减区间；

当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减，在 $(a,+\infty)$ 上单调递增.　　............................15 分

17．证明：取 BC 中点 O，连接 AO，EO.

$\because$ ΔABC 是等边三角形，O 为 BC 中点，

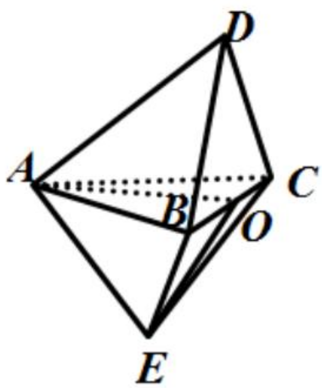
$\therefore$ $AO\perp BC$，　　........................2 分

又 $EB=EC$，$\therefore$ $EO\perp BC$,　　........................3 分

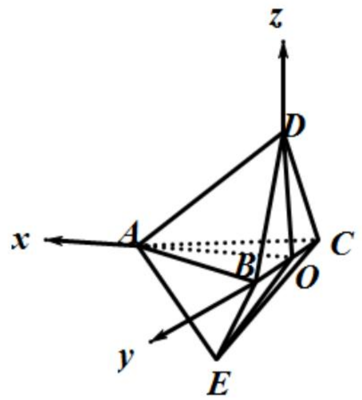
$\because$ $AO\cap EO=O$，$\therefore$ $BC\perp$ 平面AEO,

又 $AE\subset$ 平面AEO，$\therefore$

$BC\perp AE$.　　........................5 分



(2)连接 DO，则 DO⊥BC，



由 $AB=AC=BC=2$，$DB=DC=EB=EC=\sqrt{2}$ 得

$AO=\sqrt{3}$，$DO=1$，

又 $AD=2$，$\therefore AO^2+DO^2=AD^2$，

$\therefore DO\perp AO$, ...8 分

又 $AO\cap BC=O$，

$\therefore DO\perp 平面ABC$ . ...9 分

如图，以 O 为坐标原点，OA，OB，OD 所在直线分别为 x,y,z 轴，建立空间直角坐标系 $O-xyz$，

则 O(0,0,0)，$A(\sqrt{3},0,0)$，$C(0,-1,0)$，D(0,0,1)，

∴ $\overrightarrow{CA}=(\sqrt{3},1,0)$，$\overrightarrow{CD}=(0,1,1)$， ....10 分

设平面 ACD 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CA}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\sqrt{3}x+y=0,\\ y+z=0,\end{cases}$

取 $x=1$，则 $\vec{n}=(1,-\sqrt{3},\sqrt{3})$. ....12 分

∵ $\angle AOE$ 是二面角 $A-BC-E$ 的平面角，∴ $\angle AOE=30^\circ$， ....13 分

又 $OE=1$，∴ $E(\frac{\sqrt{3}}{2},0,-\frac{1}{2})$，$\overrightarrow{DE}=(\frac{\sqrt{3}}{2},0,-\frac{3}{2})$， ....14 分

则 $\cos<\overrightarrow{DE},\vec{n}>=\frac{\overrightarrow{DE}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{DE}||\vec{n}|}=-\frac{\sqrt{7}}{7}$， ....16 分

∴直线 DE 与平面 ACD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{7}$. ....17 分

18.解：（1）依题意有 $b=1,c=\sqrt{3}$，解得 $a^2=b^2+c^2=4$，

所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ....4 分

（2）设 $l_{AB}:x=my+1(m\neq 0)$, $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,则 $l_{CD}:x=-\frac{1}{m}y+1(m\neq 0)$,

联立 $\begin{cases}x=my+1\\ x^2+4y^2=4\end{cases}$, 故 $(m^2+4)y^2+2my-3=0$，

$\Delta=16m^2+48>0$，$y_1+y_2=\frac{-2m}{m^2+4}$， ....6 分

故 $M(\frac{4}{m^2+4},\frac{-m}{m^2+4})$， ....7 分

由 $-\frac{1}{m}$ 代替 m，得 $N(\frac{4m^2}{1+4m^2},\frac{m}{1+4m^2})$， ....8 分

当 $\frac{4}{m^2+4}=\frac{4m^2}{1+4m^2}$，即 $m^2=1$ 时，$l_{MN}:x=\frac{4}{5}$，过点 $K(\frac{4}{5},0)$.

当 $\frac{4}{m^2+4}\neq\frac{4m^2}{1+4m^2}$，即 $m^2\neq 1$ 时，

$K_{MN}=\frac{5m}{4(m^2-1)}$，$l_{MN}:y+\frac{m}{m^2+4}=\frac{5m}{4(m^2-1)}(x-\frac{4}{m^2+4})(m^2\neq 1,m\neq 0)$，

令 $y=0,x=\frac{4(m^2-1)}{5(m^2+4)}+\frac{4}{(m^2+4)}=\frac{4m^2+16}{5(m^2+4)}=\frac{4}{5}$，

∴直线 MN 恒过点 $K(\frac{4}{5},0)$.

当 $m=0$，经验证直线 MN 过点 $K(\frac{4}{5},0)$.

综上，直线 MN 恒过点 $K(\frac{4}{5},0)$ . ...12 分

(3)

$$S_{\Delta MNS}=S_{\Delta MKS}+S_{\Delta NKS}=\frac{1}{2}\cdot|KS|\cdot|y_M-y_N|=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot|\frac{m}{1+4m^2}+\frac{m}{m^2+4}|=\frac{1}{2}\cdot\frac{|m^3+m|}{4m^4+17m^2+4}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{|m+\frac{1}{m}|}{4m^2+\frac{4}{m^2}+17},$$

....14 分

令 $t=|m+\frac{1}{m}|\in[2,+\infty)$，$S_{\Delta MNS}=\frac{1}{2}\cdot\frac{|m+\frac{1}{m}|}{4m^2+\frac{4}{m^2}+17}=\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{4t^2+9}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4t+\frac{9}{t}}$，

∵ $S_{\Delta MNS}$ 在 $t\in[2,+\infty)$ 上单调递减，∴ $S_{\Delta MNS}\leq\frac{1}{25}$， .... 16 分

当且仅当 $t=2,m=\pm 1,$ 时取等号.

故 $\triangle MNS$ 面积的最大值为 $\frac{1}{25}$ . ...17 分

19. 解：（1）由题意得 $a_1+a_2+\cdots+a_n=4$，则 $1+1+2=4$ 或 $1+3=4$，

故所有 4 的 1 增数列有数列 $1,2,1$ 和数列 1，3. ....3 分

（2）当 $n=5$ 时，因为存在 m 的 6 增数列，

所以数列 $\{a_n\}$ 的各项中必有不同的项，所以 $m\geq 6$ 且 $m\in N^*$.

若 $m=6$，满足要求的数列 $\{a_n\}$ 中有四项为 1，一项为 2，

所以 $k\le 4$，不符合题意，所以 $m>6$.

若 $m=7$，满足要求的数列 $\{a_n\}$ 中有三项为 1，两项为 2，符合 m 的 6 增数列.

所以，当 $n=5$ 时，若存在 m 的 6 增数列，m 的最小值为 7. ....8 分

（3）若数列 $\{a_n\}$ 中的每一项都相等，则 $k=0$，

若 $k\ne 0$，所以数列 $\{a_n\}$ 中存在大于 1 的项，

若首项 $a_1\ne 1$，将 a_1 拆分成 a_1 个 1 后 k 变大，

所以此时 k 不是最大值，所以 $a_1=1$.

当 $i=2,3,...,n$ 时，若 $a_i>a_{i+1}$，交换 a_i,a_{i+1} 的顺序后 k 变为 $k+1$，

所以此时 k 不是最大值，所以 $a_i\le a_{i+1}$.

若 $a_{i+1}-a_i\notin\{0,1\}$，所以 $a_{i+1}\ge a_i+2$，

所以将 a_{i+1} 改为 $a_{i+1}-1$，并在数列首位前添加一项 1，所以 k 的值变大，

所以此时 k 不是最大值，所以 $a_{i+1}-a_i\in\{0,1\}$.

若数列 $\{a_n\}$ 中存在相邻的两项 $a_i=2,a_{i+1}\ge 3$，设此时 $\{a_n\}$ 中有 x 项为 2，

将 a_{i+1} 改为 2，并在数列首位前添加 $a_{i+1}-2$ 个 1 后，k 的值至少变为 $k+1$，

所以此时 k 不是最大值，

所以数列 $\{a_n\}$ 的各项只能为 1 或 2，所以数列 $\{a_n\}$ 为 $1,1,...,1,2,2,\cdots,2$ 的形式.

设其中有 x 项为 1，有 y 项为 2，

因为存在 100 的 k 增数列，所以 $x+2y=100$，

所以 $k=xy=(100-2y)y=-2y^2+100y=-2(y-25)^2+1250$，

所以，当且仅当 $x=50,y=25$ 时，k 取最大值为 1250. ....17 分