郑州市 2023—2024 学年上学期期末考试

高一数学 评分参考

一、单选题（每小题 5 分，共 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	D	A	C	C	A	B	D

二、多选题（每小题 5 分，共 20 分，全部选对得 5 分，部分选对得 2 分，有的选错得 0 分）

题号	9	10	11	12
答案	AB	BC	ABC	ACD

三、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

13. $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$;　　14. $-\dfrac{\pi}{3}$;　　15. 0;　　16. $(-4,-3]$.

四、解答题（17 题 10 分，18-22 题每小题 12 分，共 70 分）

17.解：由诱导公式可得,$\sin\alpha=\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(\pi-\alpha)=-2\cos\alpha$，　........5 分

则$\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\dfrac{-2\cos\alpha+\cos\alpha}{-2\cos\alpha-\cos\alpha}=\dfrac{1}{3}$.　.....................................10 分

18.解：(1)$\left(\dfrac{81}{16}\right)^{\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{2}\log_2 3\cdot\log_3 4-\lg 100=\dfrac{5}{4}$.　....................................6 分

(2) $\because\ a+a^{-1}=3,\ \therefore\ a^2+a^{-2}=\left(a+a^{-1}\right)^2-2=9-2=7$.　........12 分

19．解：（1）$f(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$上的单调递增.　...............................1 分

理由如下：对任意$x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，且$x_1<x_2$，　.................................2 分

$$f(x_1)-f(x_2)=a-\frac{2}{e^{x_1}+1}-\left(a-\frac{2}{e^{x_2}+1}\right)=\frac{2}{e^{x_2}+1}-\frac{2}{e^{x_1}+1}=\frac{2\left(e^{x_1}-e^{x_2}\right)}{\left(e^{x_1}+1\right)\left(e^{x_2}+1\right)}.$$ ....3 分

因为$y=e^x$在$(0,+\infty)$单调递增，且$x_1<x_2$，所以$e^{x_1}<e^{x_2}$，即$e^{x_1}-e^{x_2}<0$，

所以$f(x_1)<f(x_2)$，　.....................................5 分

所以$f(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$上的单调递增.　.....................................6 分

(2) 假设存在实数 a，使函数$f(x)$为奇函数.　.....................................7 分

则 $f(-x)+f(x)=a-\dfrac{2}{e^{-x}+1}+a-\dfrac{2}{e^{x}+1}=2a-\dfrac{2(e^{x}+1)}{e^{x}+1}=2a-2=0$， ....9 分

解得 $a=1$ ， ....11 分

故存在实数 a 使函数 $f(x)$ 是奇函数. ....12 分

20. 解析：(1)由题可得

$$\begin{aligned}f(x)&=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\sin^2 x-\sqrt{3}\cos^2 x-\frac{1}{2}\\&=\sin 2x\cos\frac{\pi}{3}+\cos 2x\sin\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}\cos 2x-\frac{1}{2}\\&=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\\&=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{2},\end{aligned}$$

$\therefore f(x)$的最小正周期为：$T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$ . ...3 分

由 $2x-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in Z)$ 得 $x=\dfrac{5\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{2}(k\in Z)$，

所以该函数图象的对称轴方程为 $x=\dfrac{5\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{2}(k\in Z)$. ....6 分

(2)由题可得

$$g(x)=\sin\left(2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}+1=\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}=-\cos 2x+\frac{1}{2}.$$ ....9 分

$\because x\in\left(-\dfrac{5\pi}{12},\dfrac{\pi}{8}\right)$， $\therefore 2x\in\left(-\dfrac{5\pi}{6},\dfrac{\pi}{4}\right)$，

$\therefore \cos 2x\in\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right]$ $\therefore g(x)$的值域为$\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$ ....12 分

21. 解析：(1) 由题意，不等式 $f(x)\le 2$ 对于一切实数 x 恒成立，

等价于 $x^2-(a-1)x+a\ge 0$ 对于一切实数 x 恒成立, ...2 分

所以 $(a-1)^2-4a\le 0$，

解得 $3-2\sqrt{2}\le a\le 3+2\sqrt{2}$. ....5 分

(2)不等式 $f(x)>0$ 等价于 $x^2-(a-1)x+a-2<0\Leftrightarrow [x-(a-2)](x-1)<0$. ....6 分

当 $a-2>1$ 即 $a>3$ 时，不等式可化为 $1<x<a-2$，

原不等式的解集$\{x|1<x<a-2\}$；

当$a-2=1$即$a=3$时，不等式可化为$(x-1)^2<0$，

原不等式的解集为$\varnothing$；

当$a-2<1$即$a<3$时，不等式可化为$a-2<x<1$，

此时$\{x|a-2<x<1\}$. ....11 分

综上所述：①当$a<3$时，不等式的解集为$\{x|a-2<x<1\}$；

②当$a=3$时，不等式的解集为$\varnothing$；

③当$a>3$时，不等式的解集为$\{x|1<x<a-2\}$. ....12 分

22. (1)由题可知

$$\begin{aligned} f(x)&=15W(x)-20x-10x \\ &=15W(x)-30x \\ &=\begin{cases} 15\times 5(x^2+3)-30x, 0\le x\le 2, \\ 15\times\left(50-\dfrac{50}{x+1}\right)-30x, 2<x\le 5 \end{cases} \\ &=\begin{cases} 75x^2-30x+225, 0\le x\le 2, \\ 750-\dfrac{750}{x+1}-30x, 2<x\le 5. \end{cases} \end{aligned}$$

.......................5分

(2)解：由(1)得

$$f(x)=\begin{cases} 75x^2-30x+225,\ 0\le x\le 2, \\ 750-\dfrac{750}{x+1}-30x\ ,\ 2<x\le 5, \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 75\left(x-\dfrac{1}{5}\right)^2+222\ ,\ 0\le x\le 2, \\ 780-30\left[\dfrac{25}{1+x}+(1+x)\right]\ ,\ 2<x\le 5, \end{cases}$$

...........................8分

当$0\le x\le 2$时，$f(x)_{\max}=f(2)=465$；

当$2<x\le 5$时，$f(x)=780-30\left[\dfrac{25}{1+x}+(1+x)\right]\le 780-30\times 2\sqrt{\dfrac{25}{1+x}\cdot(1+x)}=480$ ；

(当且仅当$\dfrac{25}{1+x}=1+x$时，即$x=4$时等号成立.)

因为$465<480$，所以当$x=4$时，$f(x)_{\max}=480$.

所以当施用肥料为 4 千克时，种植该果树获得的最大利润是 480 元 ....12 分