# 2020-2021学年上期期末考试高二数学(理科)评分参考

**一、选择题：**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | C | B | A | B | B | C | D | D | B | C | A |

**二、填空题：**

13. $(5,-3,4)$;　14. $\frac{9}{8}$;　15. $\frac{\sqrt{17}}{3}$;　16. $2\sqrt{10}$.

**三、解答题：**

17.（10分）解：若 $p$ 真，则 $a \ge (x+\frac{1}{x})_{\max}$. ……………………2分

$\because x\in[\frac{1}{2},2], \therefore x+\frac{1}{x}\le\frac{5}{2}$ 当且仅当 $x=2$ 或 $\frac{1}{2}$ 时等号成立. $\therefore a\ge\frac{5}{2}$ ………………4分

若 $q$ 真，$\Delta=a^2-4a<0$ $\therefore 0<a<4$ ……………………8分

$\because p\wedge q$ 是真命题，$\therefore p,q$ 都是真命题.……………………9分

$\therefore \frac{5}{2}\le a<4$ .……………………10分

18.（12分）解：（1）设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q,由题得：$2a_1=a_2+6a_3$，即 $2a_1=a_1q+6a_1q^2$，

$6q^2+q-2=0$，…………3分

$\therefore q=\frac{1}{2}$ 或 $q=-\frac{2}{3}$(舍) …………5分

（2）$a_n=\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2})^{n-1}=(\frac{1}{2})^n$，$b_n=(n+1)\cdot(\frac{1}{2})^n$，…………6分

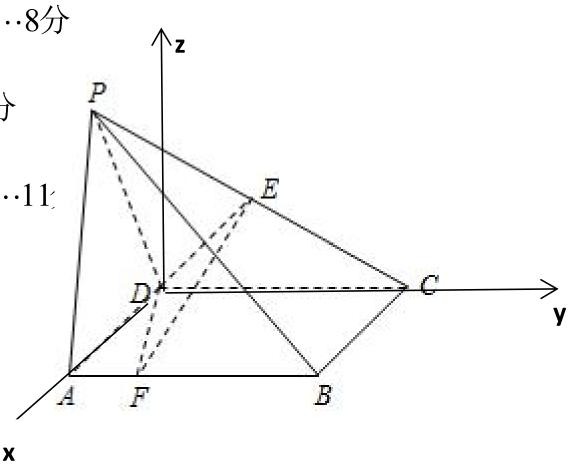
$T_n=2\times(\frac{1}{2})^1+3\times(\frac{1}{2})^2+\dots+(n+1)\cdot(\frac{1}{2})^n, \cdots 7$分

$\frac{1}{2}T_n=2\times(\frac{1}{2})^2+3\times(\frac{1}{2})^3+\dots+(n+1)\cdot(\frac{1}{2})^{n+1}, \cdots 8$分

$\frac{1}{2}T_n=1+(\frac{1}{2})^2+\dots+(\frac{1}{2})^n-(n+1)\cdot(\frac{1}{2})^{n+1} \cdots 9$分

$=\frac{3}{2}-(\frac{1}{2})^n-(n+1)\cdot(\frac{1}{2})^{n+1}=\frac{3}{2}-(n+3)\cdot(\frac{1}{2})^{n+1} \cdots 11$

$\therefore T_n=3-(n+3)\cdot(\frac{1}{2})^n \cdots 12$分



**19.**（12 分）

证明： ⑴$\because PD=AD=DC$，$E$为$PC$中点 ，$\therefore DE\perp PC.\cdots$1分

$\because$面$PCD\perp$面$ABCD$，面$PCD\cap$面$ABCD=CD, BC\perp CD,$

$\therefore BC\perp$面$PCD,.$ 3分

$\because DE\subset$面$PCD,\therefore BC\perp DE.\cdots$4分

$\because PC\cap BC=C,\therefore DE\perp$面$PBC.\cdots$5分

(2)$\because$面$PCD\perp$面$ABCD$，面$PCD\cap$面$ABCD=CD$,在面$PCD$内，过$D$点作$DC$的垂线$DZ$，则$DZ\perp$面$ABCD$.如图，以$DA$为$x$轴，$DC$为$y$轴,$DZ$为$z$轴建立空间直角坐标系,$\cdots$6分

$\therefore F(3,1,0),E(0,\frac{3}{4},\frac{3\sqrt{3}}{4}),C(0,3,0),D(0,0,0),\overrightarrow{DC}=(0,3,0),\overrightarrow{DE}=(0,\frac{3}{4},\frac{3\sqrt{3}}{4}),\overrightarrow{DF}=(3,1,0),\cdots$8分

设面$DCE$的法向量为$\overrightarrow{n_1}$,求得$\overrightarrow{n_1}=(1,0,0)$，设面$DEF$的法向量为$\overrightarrow{n_2}$,求得$\overrightarrow{n_2}=(1,-3,\sqrt{3})$,10分

$\cos\langle\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\rangle=\frac{1}{\sqrt{13}}$,设二面角$C-DE-F$的平面角为$\theta$,$\therefore\sin\theta=\frac{2\sqrt{39}}{13}.\cdots$12分

20. 解：（1）连接 ST.在$\Delta RST$ 中，$\angle SRT=60^\circ$.由余弦定理可得：

$ST^2=4^2+6^2-2\times4\times6\times\cos60^\circ=28$ ，$\therefore ST=2\sqrt{7}$ ………………………2 分

在$\Delta RST$ 中,由余弦定理可得，$\cos\angle STR=\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

在$\Delta PST$ 中，$\therefore\sin\angle PTS=\cos\angle STR=\frac{2\sqrt{7}}{7}$，

由正弦定理可得：$\frac{SP}{\sin\angle PTS}=\frac{ST}{SIN120^\circ}$ 解得：$SP=\frac{8\sqrt{3}}{3}$ .………………………4 分

在直角$\Delta SPR$中，$PR^2=4^2+\left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{112}{3},\therefore PR=\frac{4\sqrt{21}}{3}$ ………………………6 分

(2)$S_{\Delta PMN}=\frac{1}{2}|PM||PN|\sin120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}|PM||PN|$,

$S_{\Delta PMN}=S_{\Delta PRM}+S_{\Delta PRN}=\frac{1}{2}|PM|\times4+\frac{1}{2}|PN|\times6=2|PM|+3|PN|$………………………8分

$\therefore\frac{\sqrt{3}}{4}|PM||PN|=2|PM|+3|PN|\ge2\sqrt{6|PM|\cdot|PN|}$.

$\therefore|PM||PN|\ge128$,当且仅当$|PM|=8\sqrt{3}$…………………………10分

$\therefore S_{\Delta PMN}=\frac{\sqrt{3}}{4}|PM||PN|\ge32\sqrt{3}$………………………12分

21(1)由已知，易得$a^2=4$，$b^2=2$，椭圆$C$的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$……………………………4分

由条件$\begin{cases} y=x+m, \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1, \end{cases}$得$3x^2+4mx+2m^2-4=0$，$\Delta=(4m)^2-12(2m^2-4)>0$.

解得$-\sqrt{6}<m<\sqrt{6}$，设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

由求根公式得$x_1+x_2=\frac{-4m}{3},x_1\cdot x_2=\frac{2m^2-4}{3}$，……………………………6分

$|AB|=\sqrt{2}\sqrt{(\frac{-4m}{3})^2-4\times\frac{2m^2-4}{3}}=\frac{4}{3}\sqrt{6-m^2}$，……………………………8分

$Q(0,3m)$到直线$l:x-y+m=0$的距离$d=\frac{2|m|}{\sqrt{2}}$，……………………………9分

$S_{\Delta ABQ}=\frac{1}{2}\times|AB|\times d=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times\sqrt{6-m^2}\times\frac{2}{\sqrt{2}}|m|=\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{(6-m^2)\ m^2}$……………………10分

$\leq\frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{6-m^2+m^2}{2}=2\sqrt{2}$，当且仅当$6-m^2=m^2$即$m=\pm\sqrt{3}$时取得等号，

即当$\Delta ABQ$面积最大时，$m$的值为$\pm\sqrt{3}$．……………………………12分

22.解:(1)由题可得：$\begin{cases} a<0, \\ -1+2=-\frac{b}{a}, \\ -1\times 2=\frac{c}{a}, \end{cases}$ 即：$\begin{cases} a<0, \\ \frac{b}{a}=-1, \\ \frac{c}{a}=-2, \end{cases}$……………………………2分

$bx^2+4ax-(c+3b)\leq 0$等价于$\frac{b}{a}x^2+4x-\left(\frac{c}{a}+\frac{3b}{a}\right)\geq 0$……………………………4分

即：$x^2-4x-5\leq 0$，解得：$-1\leq x\leq 5$；……………………………6分

$f(x)\geq 2ax+b$恒成立，即$ax^2+(b-2a)x+c-b\geq 0$恒成立.

$\therefore \begin{cases} a>0 \\ \Delta=(b-2a)^2-4a(c-b)\le 0 \end{cases}$，也即：$\therefore \begin{cases} a>0 \\ b^2\le 4ac-4a^2 \end{cases}$ ……………………………8 分

$\therefore \dfrac{b^2}{3a^2+c^2}\le \dfrac{4ac-4a^2}{3a^2+c^2}=4\times \dfrac{\frac{c}{a}-1}{\frac{c^2}{a^2}+3}$， ……………………………9 分

令 $t=\dfrac{c}{a}-1$，则 $\dfrac{c}{a}=t+1$，

$\because b^2\le 4ac-4a^2, \therefore ac-a^2\ge 0$，$\therefore \dfrac{c}{a}\ge 1, t\ge 0$.

令 $y=4\times \dfrac{\frac{c}{a}-1}{\frac{c^2}{a^2}+3}=\dfrac{4t}{t^2+2t+4}$，当 $t=0$ 时，$y=0$；

当 $t>0$ 时，$y=\dfrac{4t}{t^2+2t+4}=\dfrac{4}{t+\frac{4}{t}+2}\le \dfrac{2}{3}$，当且仅当 $t=2, \dfrac{c}{a}=3$ 取最大值.

所以 $\dfrac{b^2}{3a^2+c^2}$ 的最大值为 $\dfrac{2}{3}$ .……………………………12 分