2020年郑州市高三三测数学文科试题

评分参考

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	C	C	A	A	D	B	B	B	A	D	B

二、填空题

13. 8 ；　14.11；　15. $\sqrt{6}$ ；　16. $-\dfrac{3}{17}$.

三、解答题

17.（1）由 $a_1=\dfrac{1}{4},a_4=\dfrac{1}{256}$，得 $q^3=\dfrac{a_4}{a_1}=\dfrac{1}{64},\therefore q=\dfrac{1}{4}$，所以 $a_n=(\dfrac{1}{4})^n$……………2 分

$b_n=-2-3\log_4(\dfrac{1}{4})^n=3n-2$………………………………………5 分

由（1），得 $c_n=\dfrac{1}{b_nb_{n+1}}=\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{3n-2}-\dfrac{1}{3n+1})$，………8 分

$S_n=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{n}{3n+1}$.12 分

18.（1）因为 $K^2=\dfrac{150(30\times60-40\times20)^2}{100\times50\times80\times70}\approx5.357>5.024.$ ，……………2 分

所以有 97.5％的把握认为参与马拉松赛事与性别有关……………3 分

（2）（i）根据分层抽样方法得，男生 $8\times\dfrac{3}{4}=6$ 人，女生 2 人，

所以选取的 8 人中，男生有 6 人，女生有 2 人……………5 分

（ii）设抽取的 6 名男生分别为 A,B,C,D,E,F ，2 名女生为 a,b；

从中抽取两人，分别记为(A,B)，$(A,C),(A,D),(A,E),(A,F),(A,a),(A,b),(B,C)$,

$(B,D),(B,E),(B,F),(B,a),(B,b),(C,D),(C,E),(C,F),(C,a),(C,b),(D,E),(D,F)$,

$(D,a),(D,b),(E,F),(E,a),(E,b),(F,a),(F,b),(a,b)$ 共 28 种情形，……………8 分

其中 2 男的共 15 种情形，……………10 分

所以，所求概率 $p=\dfrac{15}{28}$.……………12 分

19.（1）证明：由题意 $PA^2+AB^2=PB^2$，

所以$\angle BAP=90^\circ$，则 $PA\perp AB$，……………2 分

又侧面 $PAB\perp$底面 $ABCD$，面 $PAB\cap$面 $ABCD=AB$，$PA\subset$面 PAB，

则 $PA\perp$面 $ABCD$.……………4 分

$BD\subset$面 $ABCD$，则 $PA\perp BD$,又因为$\angle BCD=120^\circ$，$ABCD$ 为平行四边形，

则$\angle ABC=60^\circ$，又 $AB=AC$，

则ΔABC 为等边三角形，则 $ABCD$ 为菱形，则 $BD\perp AC$.

又 $PA\cap AC=A$，则 $BD\perp$面 PAC.……………6 分

（2）由 $V_{M-PAC}=\dfrac{1}{2}V_{P-ACD}$，则 M`为 PB 中点，

由 $AB=AC=2$，$\angle BCD=120^\circ$，得 $BD=2\sqrt{3}$.……………8 分

由(I)知，$V_{P-AMB}=V_{M-PAB}=\dfrac{1}{2}V_{D-PAB}$,……………10 分

$=\dfrac{1}{2}V_{P-ABD}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}\times\sqrt{3}\times 2=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. ……………12 分

20.⑴由题易知C_1的半径$r_1=\sqrt{3}$，C_2圆的半径$r_2=2$.……………2 分

又∵椭圆与C_1、C_2同时相切，则$\begin{cases}a=r_2=2,\\ b=r_1=\sqrt{3},\end{cases}$……………4 分

则 C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.……………5 分

⑵①当 l 斜率为 0 时，l 与椭圆 C 相切，不符合题意.……………6 分

②l 斜率不为 0 时，设 l：$x=my+n$，

原点到 l 的距离 $d=\frac{|n|}{\sqrt{m^2+1}}=r_1=\sqrt{3}$.

则$n^2=3m^2+3$ (i)

由$\begin{cases}x=my+n,\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\end{cases}$……………7 分

可得：$(3m^2+4)y^2+6mny+3n^2-12=0$，

设 $A(x_1,y_1)$ $B(x_2,y_2)$，由求根公式得:

$y_1+y_2=-\frac{6mn}{3m^2+4}$，$y_1y_2=\frac{3n^2-12}{3m^2+4}$,

$|AB|=\sqrt{m^2+1}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{m^2+1}\sqrt{\frac{48(3m^2-n^2+4)}{(3m^2+4)^2}}$,

将(i)代入得$|AB|=\sqrt{m^2+1}\frac{4\sqrt{3}}{3m^2+4}=\frac{4\sqrt{3}}{3\sqrt{m^2+1}+\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}}$， ……………9 分

令 $t=\sqrt{m^2+1}$则 $t\geq 1$，

$g(t)$=$3t+\frac{1}{t}$在$[1，+\infty)$上单调递增，……………11 分

则 $t=1$，即 $m=0$ 时，$|AB|_{max}=\sqrt{3}$.……………12 分

21.（1）依题意知 $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，……………1 分

当$m=6$时， $f(x)=\ln x+2x^2-5x,$

$\therefore f'(x)=\frac{1}{x}+4x-5=\frac{(4x-1)(x-1)}{x}$,……………2 分

令 $f(x)=0$，解得 $x=1,x=\frac{1}{4}$

则当 $0<x<\frac{1}{4}$或$x>1$ 时，$f'(x)>0,f(x)$单调递增，……………3 分

当$\frac{1}{4}<x<1$ 时，$f'(x)<0$， $f(x)$ 单调递减. ……………4 分

∴所以当 $x=1$ 时函数 $f(x)$ 取得极小值，且极小值为 $f(1)=-3$，

当 $x=\frac{1}{4}$ 时函数 $f(x)$ 取得极大值，且极大值为 $f(\frac{1}{4})=-\ln 4-\frac{9}{8}$． …………5 分

（2）由 $f(x)=2x^2$，可得 $\ln x=(m-1)x$，

又 $x>0$，所以$\frac{\ln x}{x}=m-1$，$\therefore m=\frac{\ln x}{x}+1$． ……………7 分

令 $g(x)=1+\frac{\ln x}{x}(x>0)$，则$g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$,

由$g'(x)\geq 0$，得 $1\leq x\leq e$；由$g'(x)\leq 0$，得 $e\leq x\leq 4$， ……………8 分

∴ $g(x)$在区间$[1,e]$上是增函数，在区间$[e,4]$上是减函数.

∴当 $x=e$ 时函数 $g(x)$有最大值，且最大值为 $g(e)=1+\frac{1}{e}$， ……………9 分

又 $g(1)=1,g(4)=1+\frac{\ln 2}{2}$,……………10 分

∴ 当$1+\frac{\ln 2}{2}\leq m<1+\frac{1}{e}$时，方程在区间$[1,4]$上有两个实数解……………11 分

∴实数 m 的取值范围为$1+\frac{\ln 2}{2}\leq m<1+\frac{1}{e}$． ……………12 分

22.（Ⅰ）曲线 C_1 的普通方程为： $x\sin\theta-y\cos\theta-\sin\theta=0$，

曲线C_2的普通方程为：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$;……………………………………………………5 分

（Ⅱ）将$C_1:\begin{cases}x=1+t\cos\theta,\\ y=t\sin\theta.\end{cases}$ （t 为参数）

代入C_2：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$化简整理得：$(\sin^2\theta+3)t^2+6t\cos\theta-9=0$,

设 A、B 两点对应的参数分别为t_1、t_2，则$\Delta=36\cos^2\theta+36(\sin^2\theta+3)=144>0$ 恒成立，

$t_1+t_2=\frac{-6\cos\theta}{\sin^2\theta+3},t_1t_2=\frac{-9}{\sin^2\theta+3}$,

$\therefore |PA|+|PB|=|t_1|+|t_2|=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\frac{12}{\sin^2\theta+3}$ ，

$\because \sin^2\theta\in[0,1]\ \therefore |PA|+|PB|\in[3,4]$……………………………………………………10 分

23.（1）当$m=3$时，$f(x)=|3x+1|+|2x-1|$，

原不等式$f(x)>4$等价于$\begin{cases}x<-\dfrac{1}{3}\\ -5x>4\end{cases}$ 或$\begin{cases}-\dfrac{1}{3}\le x\le\dfrac{1}{2}\\ x+2>4\end{cases}$ 或$\begin{cases}x>\dfrac{1}{2}\\ 5x>4\end{cases}$，

解得：$x<-\dfrac{4}{5}$或无解或$x>\dfrac{4}{5}$，

所以，$f(x)>4$的解集为$(-\infty,-\dfrac{4}{5})\cup(\dfrac{4}{5},+\infty)$．……………………………………………5 分

（2）$\because 0<m<2,\therefore -\dfrac{1}{m}<\dfrac{1}{2},m+2>0,m-2<0$．

则$f(x)=|mx+1|+|2x-1|=\begin{cases}-(m+2)x,x<-\dfrac{1}{m},\\ (m-2)x+2,-\dfrac{1}{m}\le x\le\dfrac{1}{2},\\ (m+2)x,x>\dfrac{1}{2}\end{cases}$

所以函数$f(x)$在$(-\infty,-\dfrac{1}{m})$上单调递减，在$[-\dfrac{1}{m},\dfrac{1}{2}]$上单调递减，在$(\dfrac{1}{2},+\infty)$上单调递增.

所以当$x=\frac{1}{2}$时，$f(x)$取得最小值，$f(x)_{\min}=f(\dfrac{1}{2})=1+\dfrac{m}{2}$．

因为对任意$x\in R,f(x)\ge\dfrac{3}{2m}$恒成立，

所以$f(x)_{\min}=1+\dfrac{m}{2}\ge\dfrac{3}{2m}$.

又因为$m>0$，所以$m^2+2m-3\ge0$，

解得 $m \geq 1$ （$m \leq -3$ 不合题意）.

所以 m 的最小值为 1．……………………………………………10 分