2020年郑州市高三三测数学理科试题

评分参考

一、选择题

DACAB　CBDBA　CD

二、填空题

13. 11；　14. 8；　15. $2\sqrt{7}$；　16. $\frac{35}{12}$

三、解答题

17．解：（Ⅰ）$2(\sin B-\sin C)^2+\cos(B-C)=2\sin A^2+\cos(B+C)$,

$2(\sin B-\sin C)^2=2\sin A^2+\cos(B+C)-\cos(B-C)$,

$2(\sin B-\sin C)^2=2\sin A^2-2\sin B\sin C$,...............2 分

有正弦定理可得；

$(b-c)^2=a^2-bc$,

$b^2+c^2-a^2=bc$,...............4 分

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$.则 $A=\frac{\pi}{3}$.....................................6 分

（Ⅱ）$\frac{b+c}{a}=\frac{\sin B+\sin C}{\sin A}=\frac{\sin B+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{3}{2}\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B\right)$$

$=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin B+\frac{1}{2}\cos B\right)=2\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right),0<B<\frac{2\pi}{3}$,...............10 分

$\therefore\ \frac{\pi}{6}<\left(B+\frac{\pi}{6}\right)<\frac{5\pi}{6}$.则 $1<2\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)\le 2$,$\therefore \frac{b+c}{a}\in(1，2]$.....................................12 分

18．解：（Ⅰ）小李公司员工该月扣除险金后的平均收入

$\bar{X}=\frac{1}{100}(4000\times10+6000\times20+8000\times25+10000\times20+12000\times15+14000\times10)$ ………………3 分

$=8800$（元）

（Ⅱ）2018 年 10 月 1 日之前小李的个人所得税

$S_1=1500\times3\%+3000\times10\%+(10000-3500-4500)\times20\%=745$(元) ……5 分

2019 年 1 月 1 日起小李的个人所得税

$S_2=3000\times3\%+(10000-5000-1500-3000)\times10\%=140$(元) ……………7 分

2019 年 1 月 1 日起小李个人所得税少交 $745-140=605$(元) …………………8 分

（Ⅲ）由频率分布表可知从[9000，11000）及[11000，13000）的人群中按分层抽样抽取 7 人，其中[11000，13000）中占 3 人，记为 A,B,C；[9000，11000）中占 4 人，记为 1,2,3,4,…………9 分

从 7 人中选 2 人共有 21 种选法如下：

$AB,AC,A1,A2,A3,A4,BC,B1,B2,B3,B4,C1,C2,C3,C4,12,13,14,23,24,34$，……………10 分

其中不在同一收入的人群有 $A1$，$A2$，$A3$，$A4$，$B1$，$B2$，$B3$，$B4$，$C1$，$C2$，$C3$，$C4$ 共 12 种………11 分

所以两个宣讲员不全是同一收入人群的概率为$P=\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$…………12 分

19．证明：（Ⅰ）∵$ABCD$为矩形，∴$BC\perp AB$，
又∵平面$ABCD\perp$平面$AEBF$，$BC\subset$平面$ABCD$，平面$ABCD\cap$平面$AEBF=AB$，
∴$BC\perp$平面$AEBF$，……………2 分
又∵$AF\subset$平面$AEBF$，∴$BC\perp AF$. ……………3 分
∵$\angle AFB=90°$，即$AF\perp BF$，且BC、$BF\subset$平面BCF，$BC\cap BF=B$，
∴$AF\perp$平面BCF. ……………5 分
又∵$AF\subset$平面ADF，∴平面$ADF\perp$平面BCF. ………………………………6 分
（Ⅱ）∵$BC\parallel AD$，$AD\subset$平面ADF，∴$BC\parallel$平面ADF.
∵ΔABE和ΔABF均为等腰直角三角形，且$\angle BAE=\angle AFB=90°$，
∴$\angle FAB=\angle ABE=45°$，∴$AF\parallel BE$，又$AF\subset$平面$ADF$，∴$BE\parallel$平面$ADF$，
∵$BC\cap BE=B$，∴平面$BCE\parallel$平面ADF.
延长EB到点H，使得$BH=AF$，又$BC\underline{\underline{\parallel}}AD$，连$CH$、$HF$，易证$ABHF$是平行四边形，
∴$HF\underline{\underline{\parallel}}AB\underline{\underline{\parallel}}CD$，∴$HFDC$是平行四边形，∴$CH\parallel DF$.
过点B作CH的平行线，交EC于点G，即$BG\parallel CH\parallel DF$，（$DF\subset$平面$CDF$）
∴$BG\parallel$平面CDF，即此点G为所求的G点. ………………………………9 分
又$BE=\sqrt{2}AB=2AF=2BH$，∴$EG=\frac{2}{3}EC$，又$S_{\Delta ABE}=2S_{\Delta ABF}$，
$V_{G-ABE}=\frac{2}{3}V_{C-ABE}=\frac{4}{3}V_{C-ABF}=\frac{4}{3}V_{D-ABF}=\frac{4}{3}V_{B-ADF}=\frac{4}{3}V_{G-ADF}$ ………………………………12 分

20. 解（Ⅰ）$\begin{cases}y^2=2px\\y=2x-2\end{cases}$
得：$2x^2-(4+p)x+4=0$…………………………2 分
设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，
由求根公式得:$x_1+y_1=\frac{4+p}{2}$，$|BF|+|AF|=x_1+x_2+p=\frac{4+p}{2}+p=8$，$p=4$.

则C：$y^2=8x$…………………………4 分

⑵设直线m:$y=2x+t$，$\begin{cases}y=2x+t\\y^2=8x\end{cases}$
得：$4x^2+(4t-8)x+t^2=0$.
$\Delta=(4t-8)^2-16t^2>0\ \ t<1$，…………………………6 分
设$C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$，
∵ $\overrightarrow{CP}=4\overrightarrow{DP}$可知$x_3=4x_4$，$\frac{x_3}{x_4}=4$，$x_3+x_4=2-t$，　$x_3x_4=\frac{t^2}{4}$，
$\frac{x_3}{x_4}+\frac{x_4}{x_3}=\frac{{x_3}^2+{x_4}^2}{x_3x_4}=\frac{(x_3+x_4)^2}{x_3x_4}-2=\frac{(2-t)^2}{\frac{t^2}{4}}-2=\frac{4(2-t)^2}{t^2}-2=4+\frac{1}{4}$.

解之得：$t=\frac{8}{9}$或-8…………………………8 分

$|CD|=\sqrt{2^2+1}\sqrt{(x_3+x_4)^2-4x_3x_4}=2\sqrt{5}\times\sqrt{1-t}$，…………………………10 分

当$t=\frac{8}{9}$时，$|CD|=\frac{2}{3}\sqrt{5}$；当$t=-8$时，$|CD|=6\sqrt{5}$…………………………12 分

21.⑴$f'_{(x)}=\frac{1}{x}-\frac{a}{2\sqrt{x}}=\frac{2-a\sqrt{x}}{2x}$ $(x>0)$，…………………………1 分

①当 $a\le 0$ 时，$f'_{(x)}>0$ 恒成立，则 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；............................2 分

②当 $a>0$ 时，$f'_{(x)}=0$ 得：$x=\frac{4}{a^2}$.

当 $x\in\left(0,\frac{4}{a^2}\right)$时，$f'_{(x)}>0$，$f(x)$单调递增，

当 $x\in\left(\frac{4}{a^2},+\infty\right)$时，$f'_{(x)}<0$，$f(x)$单调递减，............................3 分

综上，$a\le 0$ 时，$f(x)$的增区间为$(0,+\infty)$.

$a>0$ 时，$f(x)$的增区间为$\left(0,\frac{4}{a^2}\right)$，减区间为$\left(\frac{4}{a^2},+\infty\right)$............................4 分

⑵由题易知 $g(x)=kx+lnx-a\sqrt{x}-1$，

即 $kx+lnx-a\sqrt{x}-1=0$ 有三个解，$a=k\sqrt{x}+\frac{lnx}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}$，即 $a=k\sqrt{x}+\frac{2ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}$仅有三解，

设 $h(x)=kx+\frac{2lnx}{x}-\frac{1}{x}$，$h'(x)=\frac{kx^2-2lnx+3}{x^2}$，

$h'(x)=0$ 可得 $kx^2-2lnx+3=0$，即 $k=\frac{lnx^2-3}{x^2}$............................6 分

设 $M(t)=\frac{lnt-3}{t}$,则 $M'(t)=\frac{4-lnt}{t^2}$，$M'(t)=0$ 得 $t=e^4$.

$t\in(0,e^4)$时, $M'(t)>0$，$M(t)$单调递增，............................5 分

$t\in(e^4,+\infty)$ 时, $M'(t)<0$，$M(t)$单调递减（同时注意 $x\to+\infty$时，$M(t)>0$）

$M(t)\le M(e^4)=\frac{1}{e^4}$ ，

当 $k\ge\frac{1}{e^4}$时，$h'(x)\ge 0$ 恒成立，此时 $a\in R$ 均符合条件;

当 $0<k<\frac{1}{e^4}$时，$k=\frac{lnt-3}{t}$由两个根不妨设为t_1,t_2且 $0<t_1<e^4<t_2$............................7 分

$k=\frac{2lnx-3}{x^2}$有两根，不妨设为x_1,x_2则$x_1=\sqrt{t_1}$，$x_2=\sqrt{t_2}$，则 $0<x_1<e^2<x_2$;

容易分析出 $h(x)$在$(0,x_1)$,$(x_2,+\infty)$单调递增，(x_1,x_2)单调递减，

则当 $0<k<\frac{1}{e^4}$时 $a\in(h(x_2)_{min},h(x_1)_{max})$............................8 分

这里需要求 $h(x_1)$和 $h(x_2)$的取值范围.

由上面分析可得 $kx_1{}^2-2lnx_1+3=0$，则 $kx_1=\frac{2lnx_1}{x_1}-\frac{3}{x_1}$.

$h(x_1)=kx_1+\frac{2lnx_1}{x_1}-\frac{1}{x_1}=\frac{2lnx_1}{x_1}-\frac{3}{x_1}+\frac{2lnx_1}{x_1}-\frac{1}{x_1}=\frac{4lnx_1-4}{x_1}$，$0<x_1<e^2$.

设 $N(x)=\frac{4lnx-4}{x}$，$0<x<e^2$，$N'(x)=\frac{4(2-lnx)}{x^2}$；易知 $N(x)$在 $0<x<e^2$上单调递增，

$N(x)<N(e^2)=\frac{4}{e^2}$,则 $h(x_1)<\frac{4}{e^2}$.　　　$\therefore a\ge\frac{4}{e^2}$............................10 分

同理 $h(x_2)=\frac{4lnx_2-4}{x_2}$，$x_2>e^2$............................11 分

由上面分析 $N(x)=\frac{4lnx-4}{x}$在$(e^2,+\infty)$单调递减，且 $x\to+\infty$时，$N(x)\to 0$，

$\therefore h(x_2) > 0$.　　　　　$\therefore a > 0$.

综上：$a \in (0, \frac{4}{e^2})$..............................12 分

22.（Ⅰ）曲线 C_1 的普通方程为：$x\sin\theta - y\cos\theta - \sin\theta = 0$，

曲线 C_2 的普通方程为：$\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$;...5 分

（Ⅱ）将 $C_1: \begin{cases} x = 1 + t\cos\theta \\ y = t\sin\theta \end{cases}$ （t 为参数）

代入 C_2：$\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$ 化简整理得：$(\sin^2\theta + 3)t^2 + 6t\cos\theta - 9 = 0$,

设 A、B 两点对应的参数分别为t_1、t_2，则$\Delta = 36\cos^2\theta + 36(\sin^2\theta + 3) = 144 > 0$ 恒成立，

$t_1 + t_2 = \frac{-6\cos\theta}{\sin^2\theta + 3}, t_1 t_2 = \frac{-9}{\sin^2\theta + 3}$,

$\therefore |PA| + |PB| = |t_1| + |t_2| = |t_1 - t_2| = \sqrt{(t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2} = \frac{12}{\sin^2\theta + 3}$ ，

$\because \sin^2\theta \in [0,1] \therefore |PA| + |PB| \in [3,4]$..10 分

23.（1）当 $m = 3$ 时，$f(x) = |3x+1| + |2x-1|$，

原不等式 $f(x) > 4$ 等价于 $\begin{cases} x < -\dfrac{1}{3} \\ -5x > 4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} -\dfrac{1}{3} \le x \le \dfrac{1}{2} \\ x + 2 > 4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x > \dfrac{1}{2} \\ 5x > 4 \end{cases}$，

解得：$x < -\dfrac{4}{5}$ 或无解或 $x > \dfrac{4}{5}$，

所以，$f(x) > 4$ 的解集为 $(-\infty, -\dfrac{4}{5}) \cup (\dfrac{4}{5}, +\infty)$． ....5 分

（2）$\because 0 < m < 2, \therefore -\dfrac{1}{m} < \dfrac{1}{2}, m + 2 > 0, m - 2 < 0$.

则 $f(x) = |mx+1| + |2x-1| = \begin{cases} -(m+2)x, x < -\dfrac{1}{m}, \\ (m-2)x + 2, -\dfrac{1}{m} \le x \le \dfrac{1}{2}, \\ (m+2)x, x > \dfrac{1}{2} \end{cases}$

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\dfrac{1}{m})$ 上单调递减，在 $[-\dfrac{1}{m}, \dfrac{1}{2}]$ 上单调递减，在 $(\dfrac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递增.

所以当 $x = \frac{1}{2}$时，$f(x)$取得最小值，$f(x)_{\min} = f(\dfrac{1}{2}) = 1 + \dfrac{m}{2}$.

因为对任意 $x \in R, f(x) \ge \dfrac{3}{2m}$ 恒成立，

所以 $f(x)_{\min}=1+\frac{m}{2}\ge\frac{3}{2m}$.

又因为 $m>0$，所以 $m^2+2m-3\ge 0$，

解得 $m\ge 1$ （$m\le -3$ 不合题意）.

所以 m 的最小值为 1．……………………………………………10 分