2019年高中毕业年级第一次质量预测

理科数学　参考答案

一、选择题（每小题5分，共60分）

1.C　2.D　3.B　4.C　5.A　6.C　7.B　8.B　9.A　10.C　11.B　12.D

二、填空题（每小题5分，共20分）

13.　20；　14.[-13,-4]；　15.144；　16.①②⑤.

三、解答题（共70分）

17. 解（Ⅰ）由 $b_n=\log_2 a_n$ 和 $b_1+b_2+b_3=12$ 得 $\log_2(a_1a_2a_3)=12$，

$\therefore a_1a_2a_3=2^{12}.$ --2分

设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，$\because a_1=4\ \therefore\ a_1a_2a_3=4\cdot 4q\cdot 4q^2=2^6\cdot q^3=2^{12}$，

计算得出 $q=4$ ------------------------------------4分

$\therefore a_n=4\cdot 4^{n-1}=4^n$ --6分

（Ⅱ）由（1）得 $b_n=\log_2 4^n=2n$，

$c_n=\dfrac{4}{2n\cdot 2(n+1)}+4^n=\dfrac{1}{n(n+1)}+4^n=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}+4^n$ --------------------------------7分

设数列 $\left\{\dfrac{1}{n(n+1)}\right\}$ 的前 n 项和为 A_n，则 $A_n=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{n}{n+1}$ -----9分

设数列 $\{4^n\}$ 的前 n 项和为 B_n，则 $B_n=\dfrac{4-4^n\cdot 4}{1-4}=\dfrac{4}{3}(4^n-1)$，--------------------------------11分

$\therefore S_n=\dfrac{n}{n+1}+\dfrac{4}{3}(4^n-1)$ ---12分

18.（Ⅰ）证明：连接 AC

$\because$ 底面 $ABCD$ 为菱形，$\angle ABC=60^\circ$，

$\therefore \Delta ABC$ 是正三角形，

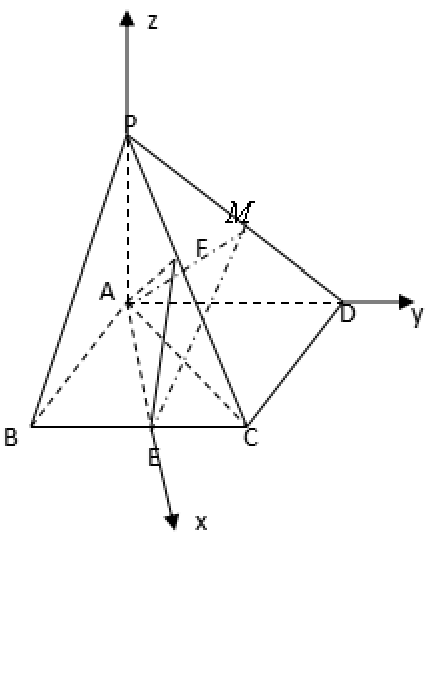
$\because E$ 是 BC 中点，$\therefore AE\perp BC$

又 $AD\,//\,BC$，$\therefore AE\perp AD$

$\because PA\perp$ 平面 $ABCI$，$AE\subset$ 平面 $ABCI$，

$\therefore PA\perp AE$，又 $PA\cap AE=A$

$\therefore AE\perp$ 平面 PAD，又 $AE\subset$ 平面 AEF



$\therefore$ 平面 $AEF\perp$ 平面 PAD. ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯4 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得，AE,AD,AP 两两垂直，以 AE,AD,AP 所在直线分别为 x 轴，y 轴，

z 轴建立如图所示的空间直角坐标系， ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯5 分

$\because$ $AE\perp$ 平面 PAD，

$\therefore$ $\angle AME$ 就是 EM 与平面 PAD 所成的角，

在 $Rt\triangle AME$ 中，$\sin\angle AME=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$，即 $\dfrac{AE}{AM}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，

设 $AB=2a$，则 $AE=\sqrt{3}a$，得 $AM=\sqrt{2}a$，

又 $AD=AB=2a$，设 $PA=2b$，则 $M(0,a,b)$，

所以 $AM=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}a$，

从而 $b=a$， $\therefore PA=AD=2a$， ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯7 分

则 $A(0,0,0),B(\sqrt{3}a,-a,0)$，$C(\sqrt{3}a,a,0),D(0,2a,0)$，$P(0,0,2a)$，

$E(\sqrt{3}a,0,0),F(\dfrac{\sqrt{3}a}{2},\dfrac{a}{2},a)$,

所以 $\overrightarrow{AE}=(\sqrt{3}a,0,0),\overrightarrow{AF}=(\dfrac{\sqrt{3}a}{2},\dfrac{a}{2},a)$，$\overrightarrow{BD}=(-\sqrt{3}a,3a,0)$，⋯⋯⋯⋯8 分

设 $\vec{n}=(x,y,z)$ 是平面 AEF 的一个法向量，则

$$\begin{cases}\vec{n}\bullet\overrightarrow{AE}=0\\ \vec{n}\bullet\overrightarrow{AF}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{3}ax=0\\ \dfrac{\sqrt{3}ax}{2}+\dfrac{ay}{2}+az=0\end{cases}$$

取 $z=a$，得 $\vec{n}=(0,-2a,a)$ ⋯⋯⋯⋯⋯⋯9 分

又 $BD\perp$ 平面 ACF，$\therefore\overrightarrow{BD}=(-\sqrt{3}a,3a,0)$ 是平面 ACF 的一个法向量， ⋯⋯10 分

$$\therefore\cos<\vec{n},\overrightarrow{BD}>=\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{BD}}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{BD}|}=\frac{-6a^2}{\sqrt{5}a\cdot2\sqrt{3}a}=-\frac{\sqrt{15}}{5}$$ ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯11 分

$\therefore$ 二面角 $C-AF-E$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯12 分

19.（Ⅰ）设重度污染区 AQI 的平均值为 x,则 $74\times2+114\times5+2x=118\times9$,解得 $x=172$.

即重度污染区 AQI 平均值为 172.--2 分

（Ⅱ）①由题意知,AQI 在[170,180)内的天数为 1,

由图可知,AQI 在[50,170)内的天数为 17 天,故 11 月份 AQI 小于 180 的天数为 1+17=18,

又 $\frac{18}{30}=\frac{3}{5}$,则该学校去进行社会实践活动的概率为 $\frac{3}{5}$.---------------------------------5 分

②由题意知,X 的所有可能取值为 0,1,2,3,且

$P(X=0)=\frac{C_{18}^{3}C_{12}^{0}}{C_{30}^{3}}=\frac{204}{1015}$,$P(X=1)=\frac{C_{18}^{2}C_{12}^{1}}{C_{30}^{3}}=\frac{459}{1015}$,

$P(X=2)=\frac{C_{18}^{1}C_{12}^{2}}{C_{30}^{3}}=\frac{297}{1015}$,$P(X=3)=\frac{C_{18}^{0}C_{12}^{3}}{C_{30}^{3}}=\frac{11}{203}$,

则 X 的分布列为--10 分

X	0	1	2	3
P	$\frac{204}{1015}$	$\frac{459}{1015}$	$\frac{297}{1015}$	$\frac{11}{203}$

数学期望 $EX=0\times\frac{204}{1015}+1\times\frac{459}{1015}+2\times\frac{297}{1015}+3\times\frac{11}{203}=\frac{6}{5}$.-----------------------------------12 分

20.解：（Ⅰ）设点 $M\left(x_0,y_0\right)$，$P(x,y)$，由题意可知 $N\left(x_0,0\right)$

$\because 2\overrightarrow{PN}=\sqrt{3}\overrightarrow{MN}$，$\therefore 2\left(x_0-x,-y\right)=\sqrt{3}\left(0,-y_0\right)$，---2 分

即 $x_0=x$，$y_0=\frac{2}{\sqrt{3}}y$

又点 M 在为圆 $C:x^2+y^2=4$ 上　　　$\therefore x_0^2+y_0^2=4$

代入得 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

即轨迹 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ --4 分

（2）由（1）可知 $D(-2,0)$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$

联立 $\begin{cases} y=kx+m \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ 得 $(3+4k^2)x^2+8mkx+4(m^2-3)=0$

$\Delta=(8mk)^2-4(3+4k^2)(4m^2-12)=16(12k^2-3m^2+9)>0$

即 $3+4k^2-m^2>0$，$x_{1,2}=\frac{-8mk\pm\sqrt{16(12k^2-3m^2+9)}}{2(3+4k^2)}$

$\therefore x_1+x_2=\frac{-8mk}{3+4k^2}$ $x_1x_2=\frac{4(m^2-3)}{3+4k^2}$ --7 分

又 $y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+mk(x_1+x_2)+m^2=\frac{3m^2-12k^2}{3+4k^2}$ ---------------8 分

$\because \left|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}\right|=\left|\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}\right|$ $\therefore \overrightarrow{DA}\perp\overrightarrow{DB}$ 即 $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=0$

即 $(x_1+2,y_1)\cdot(x_2+2,y_2)=x_1x_2+2(x_1+x_2)+4+y_1y_2=0$

$\therefore \frac{4m^2-12}{3+4k^2}+2\frac{-8mk}{3+4k^2}+4+\frac{3m^2-12k^2}{3+4k^2}=0$

$\therefore 7m^2-16mk+4k^2=0$ --10 分

解得 $m_1=2k$，$m_2=\frac{2}{7}k$，且均满足即 $3+4k^2-m^2>0$

当 $m_1=2k$ 时，l 的方程为 $y=kx+2k=k(x+2)$，直线恒过 $(-2,0)$，与已知矛盾；

当$m_2=\frac{2}{7}k$，l的方程为$y=kx+\frac{2}{7}k=k\left(x+\frac{2}{7}\right)$，直线恒过$\left(-\frac{2}{7},0\right)$

所以，直线l过定点，定点坐标为$\left(-\frac{2}{7},0\right)$.--12 分

21.解析：（Ⅰ）$f'(x)=\frac{2x^2-8x+a}{x}(x>0)$，$f'(1)=0$，则$a=6$

从而$f'(x)=\frac{2(x-1)(x-3)}{x}(x>0)$，所以$x\in(0,1)$时，$f'(x)>0$, $f(x)$为增函数；

$x\in(1,3)$时，$f'(x)<0$, $f(x)$为减函数，所以$x=1$为极大值点.--*4 分*

（Ⅱ）函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,有两个极值点

$x_1,x_2\left(x_1<x_2\right)$，则$t(x)=2x^2-8x+a=0$在$(0,+\infty)$上有两不等的正实根，所以$0<a<8$，

由$\begin{cases}x_1+x_2=4\\ x_1x_2=\frac{a}{2}\\ x_1<x_2\end{cases}$ 可得$\begin{cases}0<x_1<2\\ a=2x_1(4-x_1)\end{cases}$

从而问题转化为在$0<x_1<2$，且$x_1\neq 1$时$\frac{a\ln x_1}{1-x_1}>t\left(4+3x_1-x_1^2\right)$成立.-----------------------6 分

即证 $\frac{2x_1(4-x_1)\ln x_1}{1-x_1}>t\left(4+3x_1-x_1^2\right)$成立.

即证 $\frac{2x_1\ln x_1}{1-x_1}>t\left(x_1+1\right)$ 即证$\frac{2x_1\ln x_1}{1-x_1}-t\left(x_1+1\right)>0$

亦即证 $\frac{x_1}{1-x_1}\left[2\ln x_1+\frac{t\left(x_1^2-1\right)}{x_1}\right]>0$. ①

令$h(x)=2\ln x+\frac{t\left(x^2-1\right)}{x}(0<x<2)$ 则$h'(x)=\frac{tx^2+2x+t}{x^2}(0<x<2)$

1）. 当$t\geq 0$时，$h'(x)>0$,则$h(x)$在$(0,2)$上为增函数且$h(1)=0$，①式在$(1,2)$上不成立.

2）. 当$t<0$时，$\Delta=4-4t^2$

若$\Delta\leq 0$，即$t\leq -1$时，$h'(x)\leq 0$,所以$h(x)$在$(0,2)$上为减函数且$h(1)=0$,

$\frac{x_1}{1-x_1}$、$2\ln x_1+\frac{t\left(x_1{}^2-1\right)}{x_1}$在区间$(0,1)$及$(1，2)$上同号， 故①式成立.

若$\Delta>0$，即$-1<t<0$时，y=tx^2+2x+t的对称轴$x=-\frac{1}{t}>1$,

令$a=\min\left(-\frac{1}{t},2\right)$,则$1<x<a$时，$h(x)>0$,不合题意.

综上可知：$t\le-1$满足题意.

22.（Ⅰ）曲线C_1： $x^2+(y-3)^2=9$,把公式$\begin{cases}x=\rho\cos\alpha\\y=\rho\sin\alpha\end{cases}$代入可得：

曲线C_1的极坐标方程为$\rho=6\sin\alpha$.

设$B(\rho,\varphi)$，则$A\left(\rho,\varphi-\frac{\pi}{2}\right)$，则有$\rho=6\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)=-6\cos\varphi$.

所以，曲线C_2的极坐标方程为$\rho=-6\cos\varphi$. ------------------------------------5 分

（Ⅱ）M 到射线$\theta=\frac{5\pi}{6}$的距离为$d=4\sin\frac{5\pi}{6}=2$，

射线$\theta=\frac{5\pi}{6}$与曲线C_1交点$P\left(3,\frac{5\pi}{6}\right)$,

射线$\theta=\frac{5\pi}{6}$与曲线C_2 交点$Q\left(3\sqrt{3},\frac{5\pi}{6}\right)$

$\therefore|PQ|=3\sqrt{3}-3$ 故$S=\frac{1}{2}\times|PQ|\times d=3\sqrt{3}-3$ ---------------------10 分

23（Ⅰ）当$a=\frac{1}{2}$时，不等式$f(x)>6$可化为$|3x-1|+|2x-2|>6$，

当$x<\frac{1}{3}$时，不等式即$1-3x+2-2x>6$, $\therefore x<-\frac{3}{5}$

当$\frac{1}{3}\le x\le1$时，不等式即$3x-1+2-2x>6$, $\therefore x\in\phi$

当 $x > 1$ 时，不等式即 $3x - 1 + 2x - 2 > 6$，$\therefore x > \frac{9}{5}$

综上所述不等式的解集为 $\left\{x \middle| x < -\frac{3}{5} 或 x > \frac{9}{5}\right\}$；　--------------------------------5 分

（Ⅱ）不等式 $f(x_0) + 3x_0 > 4 + |2x_0 - 2|$

可化为 $|3x_0 - 2a| + 3x_0 > 4$

令 $g(x) = |3x - 2a| + 3x = \begin{cases} 6x - 2a, x \geq \frac{2a}{3} \\ 2a, x < \frac{2a}{3} \end{cases}$，

所以函数 $g(x)$ 最小值为 $2a$，

根据题意可得 $2a > 4$，即 $a > 2$，所以 a 的取值范围为 $(2, +\infty)$. ——————————10 分